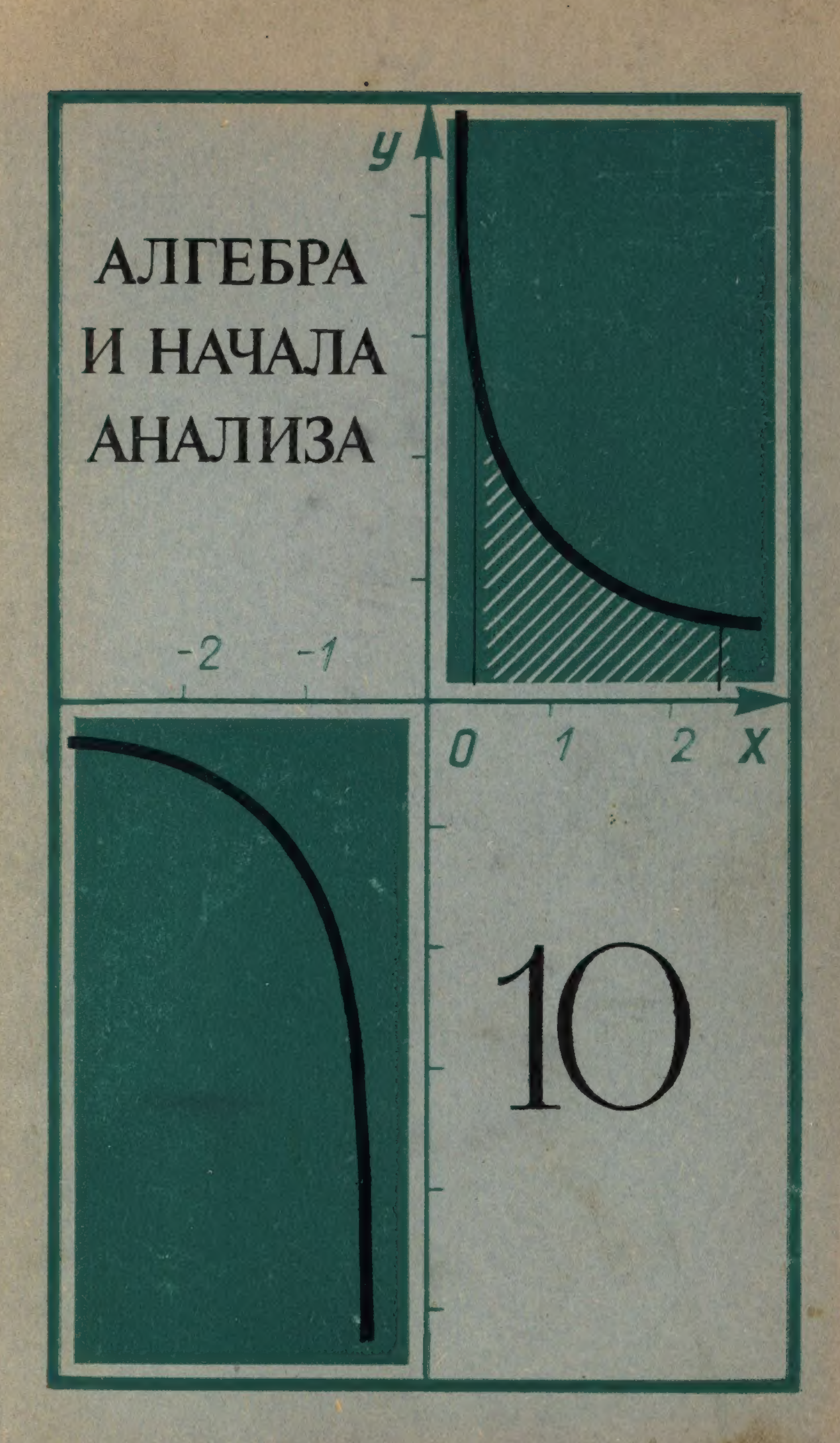

АЛГЕБРА
И НАЧАЛА
АНАЛИЗА
y
-2
-1
0
1
2
x
10

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ 10 КЛАССА

СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Под редакцией
А. Н. КОЛМОГОРОВА

Утверждено Министерством просвещения СССР

Издание 3-е

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1978

512 (075)
A45

А. Н. КОЛМОГОРОВ
О. С. ИВАШЕВ-МУСАТОВ
Б. М. ИВЛЕВ
С. И. ШВАРЦБУРД

В книге использованы материалы пробного учебника «Алгебра и начала анализа, 10 кл.» авторов *Б. Е. Вейца* и *И. Т. Демидова* под ред. *А. Н. Колмогорова.*

$А \frac{60601 - 117}{103(03) - 78}$ инф. письмо 512(075)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава VI.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ИХ ГРАФИКИ И ПРОИЗВОДНЫЕ (продолжение)

Глава VIII.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ, ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ И СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИИ

Глава IX.

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Глава **VI**

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ИХ ГРАФИКИ И ПРОИЗВОДНЫЕ

(продолжение)

§ 15.

ПРОИЗВОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

75. Производная синуса

В этом параграфе будут выведены формулы для производных тригонометрических функций. Сначала докажем, что

$$\sin' x = \cos x^*. \tag{1}$$

Приведем вывод формулы (1), основанный на двух допущениях, справедливость которых будет доказана несколько позднее:

а) функция cos непрерывна при всех значениях аргумента, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x) = \cos x;$$

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Допущение о том, что $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ равен 1, достаточно убедительно из геометрических соображений. В самом деле, считая сначала x положительным, отложим на единичной окружности (рис. 1) от точки P_0 в обе стороны дуги P_0A и P_0B длины x. Длина всей дуги AB равна $2x$. Вычислим длину хорды AB:

$$|AB| = |AC| + |CB| = 2\sin x.$$

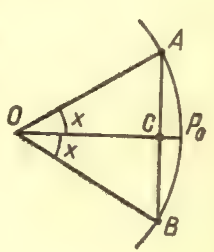


Рис. 1

* Равенство (1) можно записать и в виде

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Таким образом, отношение длины хорды AB к длине дуги AB равно

$$\frac{2\sin x}{2x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Из рисунка видно, что при малых x длина хорды и длина дуги почти равны, т. е. отношение $\frac{\sin x}{x}$ близко к единице.

Так как

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x},$$

то и при отрицательных x, малых по модулю, отношение $\frac{\sin x}{x}$ также близко к единице.

Перейдем теперь к выводу формулы (1). В соответствии с определением производной найдем предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x},$$

где $\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x$. Представим приращение синуса в виде произведения. Для этого в формуле

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \text{(см. п. 74)}$$

положим $\alpha = x + \Delta x$ и $\beta = x$. Тогда

$$\Delta \sin x = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Поэтому

$$\sin' x = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

Примеры. Воспользовавшись правилами дифференцирования сложной функции, найдем:

1. $(\sin(ax+b))' = \cos(ax+b)\cdot(ax+b)' = a\cos(ax+b)$.
2. $\left(\sin\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$.

Упражнения

Найдите производную функции:

1. $f(x) = \sin 3x$.
2. $g(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \pi\right)$.
3. $h(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

4. $M(x) = 3\sin^2(2x - 1)$.

5. $f(t) = \sin 2t \cos t - \sin t \cos 2t$.

6. $f(x) = \sin(-x) + \sin x$.

7. $g(x) = \sin 2x - 2\sin x \cos x + 5$.

8. $h(x) = \sin(2x - 3{,}5) + \sin 2x$.

9. $M(x) = 2x + 3{,}6\sin^5(\pi - x)$.

10. $f(u) = \cos 2u \cos\frac{\pi}{2} - \sin 2u \cdot \sin\frac{\pi}{2}$.

11. Покажите, что производная функции $f(x) = 2x - \sin x$ положительна при всех значениях x и, значит, функция f возрастает на R.

12*. Найдите, при каких x производная функции $g(x) = x - \sin x$ обращается в нуль. Покажите, что эта функция возрастает на R. Начертите ее график.

13*. Исследуйте функцию $h(x) = x - 2\sin x$.

14*. Докажите, что функция $g(x) = \sin(2x - 5) - 3x$ убывает на промежутке $]-\infty; \infty[$.

76. Производные косинуса, тангенса и котангенса

В этом пункте мы воспользуемся производной синуса (п. 75) для вычисления производных косинуса, тангенса и котангенса.

$$\cos' x = -\sin x, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{3}$$

Каждая из этих формул справедлива в любой точке области определения соответствующей функции.

Для вывода формулы (1) воспользуемся равенством $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ и правилом дифференцирования сложной функции:

$$\cos' x = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x\,(-1) = -\sin x.$$

Чтобы доказать формулы (2) и (3), применим формулу для производной частного и уже известные формулы для производных синуса и косинуса:

$$\operatorname{tg}' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\operatorname{ctg}' x = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\cos' x \sin x - \sin' x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

П р и м е р. Найдем касательные к синусоиде в точках с абсциссами $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$.

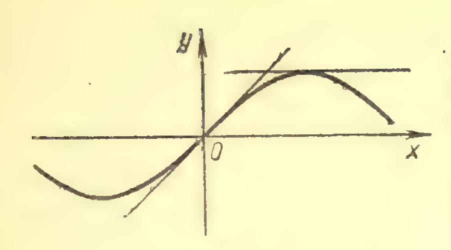


Рис. 2

Как вы знаете (п. 52), уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

В данном случае $f(x) = \sin x$. Для решения задачи надо найти значение производной синуса в точках 0, $\frac{\pi}{2}$ и π. Производная синуса равна косинусу: $f'(0) = \cos 0 = 1$. Далее находим $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ и $f'(\pi) = \cos\pi = -1$. Поэтому:

1) в точке с абсциссой $x_1 = 0$ уравнение касательной принимает вид $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$, т. е. $y = x$. Мы видим, что касательная к синусоиде в точке $(0; 0)$ есть биссектриса первого и третьего координатных углов (рис. 2);

2) в точке с абсциссой $x_2 = \frac{\pi}{2}$ уравнение касательной будет $y - 1 = 0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. $y = 1$. Это горизонтальная прямая (рис. 2);

3) аналогично, уравнение касательной в точке с абсциссой $x_3 = \pi$ будет $y - 0 = (-1)(x - \pi)$, т. е. $y = \pi - x$.

Упражнения

Найдите производную функции:

15. $f(x) = 1{,}3\cos x$.
16. $h(x) = 3\cos(2{,}3x - 10\pi)$.
17. $g(x) = 2\pi - 0{,}5\cos(\pi - x)$.
18. $u(x) = 2x^2 - 30\cos(5x + 6)$.
19. $v(x) = -2\cos(x - \pi) + 2\sin 2x$.
20. $v(x) = 5\operatorname{tg}(2x + 3) + 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.
21. $s(x) = 3\operatorname{tg}(2x + 1)$.
22. $s(x) = \frac{2\sin(6x + 3)}{\cos(6x + 3)} + \operatorname{tg}(6x + 3)$.
23. $f(u) = \cos 2u \sin u + \sin 2u \cos u$.
24. $g(t) = \cos 2\pi \cos 3t + \sin 3t \sin 2\pi$.
25. $v(t) = 4\operatorname{ctg}(2t + 3)$.
26. $v(x) = 7\operatorname{ctg}(2x - 2\pi)$.
27. $f(x) = \cos 2{,}5x \cdot \sin 0{,}5\pi + \sin 2{,}5x \cdot \cos 0{,}5\pi$.
28. $f(x) = \sin x \cos 5x - \sin 5x \cos x$.

Напишите уравнение касательной к графику функции:

29. $f(x) = \sin x$ в точках с абсциссами $-\pi$ и $\frac{\pi}{2}$.
30. $s(x) = \cos x$ в точках с абсциссами $-\frac{\pi}{2}$ и 2π.

31. $g(x) = \operatorname{tg} x$ в точках с абсциссами

$$0 \text{ и } \frac{\pi}{4}.$$

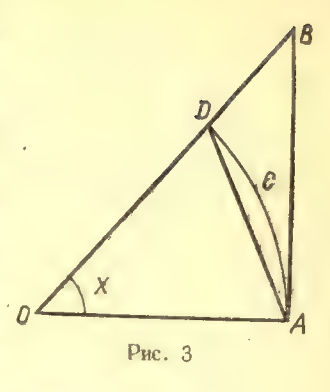


Рис. 3

77*. Непрерывность тригонометрических функций

В п. 75 мы опирались на допущение о непрерывности функции cos.

Докажем это допущение, а также непрерывность функций sin, tg, ctg во всех точках, где они определены. Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма. ***Для всех x, удовлетворяющих условию***

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2},$$

справедливо неравенство:

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|. \qquad (1)$$

Доказательство начнем со случая $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Сравним площади S_{OAD} (треугольника OAD), S_{OAB} (треугольника OAB) и S_{OACD} (сектора $OACD$) (рис. 3). Эти площади легко вычисляются

$$S_{OAD} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OD| \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x,$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |AB| = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

$$S_{OACD} = \frac{1}{2}r^2 \cdot x = \frac{1}{2}x.$$

Из рисунка 3 видим, что

$$S_{OAD} < S_{OACD} < S_{OAB},$$

или

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

т. е.

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \qquad (2)$$

Так как $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ положительны при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ неравенство (1) справедливо.

---

* Звездочкой отмечен дополнительный учебный материал, не обязательный для изучения всеми учащимися. В ряде случаев такой материал отмечен двумя треугольниками: ▶ (в начале), ◀ (в конце). См. стр. 15—17 и др.

Остается рассмотреть случай $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. При таких x имеем $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, и к $-x$ можно применить неравенство (2):

$$\sin(-x) < -x < \operatorname{tg}(-x). \quad (3)$$

Так как теперь $-x = |x|$, $\sin(-x) = |\sin x|$, $\operatorname{tg}(-x) = |\operatorname{tg} x|$, то из (3) вытекает (1).

Этим доказательство неравенства (1) для всех $x \neq 0$ из промежутка $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ закончено.

Теорема 1. ***Функция косинус непрерывна на всей числовой прямой, т. е. для любого $x_0 \in R$***

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

Доказательство. Оценим $|\cos x - \cos x_0|$.

$$|\cos x - \cos x_0| = \left|2 \sin \frac{x_0 - x}{2} \sin \frac{x + x_0}{2}\right| = 2\left|\sin \frac{x_0 - x}{2}\right| \times$$
$$\times \left|\sin \frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0|.$$

Поэтому, если для любого $\varepsilon > 0$ положить $\delta = \varepsilon$, при $|x - x_0| < \delta$ будем иметь:

$$|\cos x - \cos x_0| \leqslant |x - x_0| < \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0,$$

т. е. функция косинус непрерывна в точке x_0.

Аналогично доказывается теорема 2:

Теорема 2. ***Функция синус непрерывна на всей числовой прямой, т. е. для любого $x_0 \in R$***

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

Теорема 3. ***Функции тангенс и котангенс непрерывны каждая в своей области определения, т. е.***

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0 \text{ для любого } x_0 \in D(\operatorname{tg}),$$
$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0 \text{ для любого } x_0 \in D(\operatorname{ctg}).$$

Доказательство. Действительно, если $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, то $\cos x_0 \neq 0$.

Следовательно,

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \sin x}{\lim\limits_{x \to x_0} \cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0.$$

Аналогично доказывается вторая часть теоремы 3.

*Упражнения**

Вычислите предел:

32. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x$.
34. $\lim\limits_{x\to 0} \cos x$.
36. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x$.
38. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x$.
33. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x$.
35. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \cos x$.
37. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x$.
39. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x$.

40. Докажите непрерывность функции sin в точке $x_0 \in \mathbf{R}$ и функции ctg в точке $x_0 \in D$ (ctg).

41. Докажите, что функция f непрерывна при всех $x \in \mathbf{R}$, если

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Начертите ее график.

78*. Предел отношения длины хорды к длине стягиваемой ею дуги

Начнем с доказательства допущения «б)» из п. 75.

Т е о р е м а 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Тогда выполняется неравенство $|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$ (см. п. 77). Разделив все части этого неравенства на $|\sin x|$, получим:

$$1 < \left| \frac{x}{\sin x} \right| < \frac{1}{|\cos x|}.$$

Учитывая, что при указанных условиях $\frac{x}{\sin x} > 0$, $\cos x > 0$, имеем $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, откуда $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$.

Отсюда получаем:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = \cos 0 - \cos x.$$

Так как косинус есть непрерывная функция, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое, что

$$|0 - x| < \delta \Rightarrow |\cos 0 - \cos x| < \varepsilon.$$

Следовательно, для $x \neq 0$, удовлетворяющих неравенству $|x| < \delta$,

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| = 1 - \frac{\sin x}{x} < \cos 0 - \cos x = |\cos 0 - \cos x| < \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

На основе теоремы 1 можно проводить вычисления некоторых пределов.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4\right)=1\cdot 4=4.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

Замечание. В анализе синус есть числовая функция числового аргумента. Но введена эта функция из геометрических соображений (см. определение в п. 63). В геометрии синус рассматривался как числовая функция от величины угла. А величину угла можно измерять при помощи разных единиц измерения. При определении синуса как функции числового аргумента берут за основу радианное измерение углов: синус числа x равен синусу угла в x радианов. Чтобы быть точным, надо было бы писать

$$\sin x = \sin_{\text{г}}(x\ \textit{рад}). \tag{2}$$

Здесь слева sin есть обозначение функции числового аргумента, а справа $\sin_{\text{г}}$ есть обозначение функции величины угла. При градусном измерении углов получим

$$\sin x = \sin_{\text{г}}\left(\frac{180}{\pi}\cdot x\right)^{\circ}. \tag{3}$$

Если бы в анализе вместо функции sin, определенной равенством (2), ввели функцию

$$f(x)=\sin_{\text{г}}(x^{\circ})=\sin_{\text{г}}\left(\frac{\pi}{180}x\ \textit{рад}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{180}x\right),$$

то для нее получили бы вместо простой формулы

$$\sin'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

формулу

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\frac{\pi}{180},$$

что не так удобно.

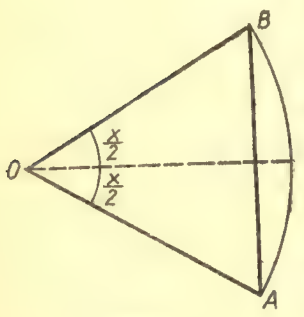


Рис. 4

Теорема 2. ***Предел отношения длины хорды окружности к длине стягиваемой ею дуги при стремлении длины дуги к нулю равен 1*** (рис. 4).

Доказательство. Пусть хорда AB окружности радиуса r стягивается дугой, содержащей x радианов, тогда длина

хорды AB равна $|AB| = 2r \sin \frac{x}{2}$, а длина дуги xr. Обозначив длину дуги через l, имеем:

$$\lim_{l \to 0} \frac{|AB|}{l} = \lim_{l \to 0} \frac{2r \cdot \sin \frac{x}{2}}{xr} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1.$$

Как мы видели в п. 75, на основе теоремы 1 доказывается формула для производной синуса, а на ее основе — формулы для производных основных тригонометрических функций. Предел $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ иногда называют «первым замечательным пределом».

Упражнения

Найдите предел:

42*. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 8x}{2x}$.

43*. $\lim_{x \to 0} \frac{5x}{\sin 4x}$.

44*. $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin (\pi - x)}{\pi - x}$.

45*. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - 6x\right)}{5x}$.

§ 16.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

79. Вторая производная

Производную от производной f' функции f называют *второй производной функции* f и обозначают f'' (читается: «эф два штриха»). Например,

$$\sin' x = \cos x, \ \sin'' x = \cos' x = -\sin x,$$
$$\cos' x = -\sin x, \ \cos'' x = (-\sin x)' = -\cos x.$$

Вторая производная помогает более подробно исследовать поведение функции. Первая производная есть скорость изменения функции, а вторая производная есть скорость изменения этой скорости.

▶ Пусть во всех точках некоторого промежутка $]a; b[$ первая производная f' имеет один и тот же знак и вторая производная f'' на этом промежутке также имеет один и тот же знак. Рассмотрим поведение функции на этом промежутке в каждом из четырех возможных случаев.

1) $f' > 0$, $f'' > 0$. Из того, что первая производная f' положительна, следует, что функция f на промежутке $]a; b[$ возрастает.

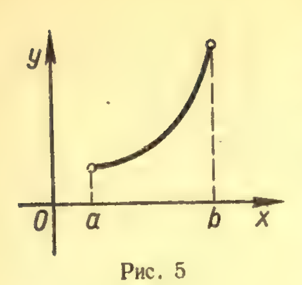


Рис. 5

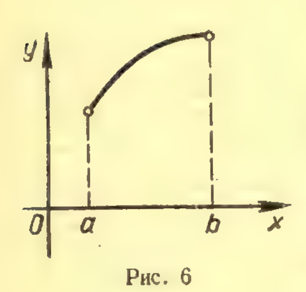


Рис. 6

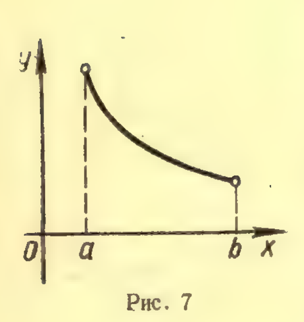


Рис. 7

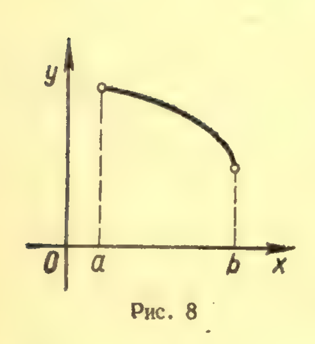


Рис. 8

Функция f' также возрастает на этом промежутке, так как $f'' > 0$. Поэтому сама функция f растет ускоренно (рис. 5).

2) $f' > 0$, $f'' < 0$. Функция f растет замедленно (рис. 6).

3) $f' < 0$, $f'' > 0$. Функция f убывает. Скорость ее изменения f' отрицательна и возрастает (ввиду того, что $f'' > 0$), значит, f' убывает по модулю. Поэтому функция f убывает замедленно (рис. 7).

4) $f' < 0$, $f'' < 0$. Функция f убывает ускоренно (рис. 8).

В первом и третьем случаях $f'' > 0$ и (рис. 5 и 7) график расположен выше касательной, проведенной в любой точке графика. Говорят, что график функции обращен «выпуклостью вниз». Во втором и четвертом случаях $f'' < 0$ и (рис. 6 и 8) график расположен ниже касательной, проведенной в любой точке графика. Говорят, что график обращен «выпуклостью вверх».

В курсах математического анализа доказывается, что характер выпуклости определяется только знаком второй производной (независимо от знака первой производной): если на промежутке I вторая производная положительна, то график обращен выпуклостью вниз; если же на промежутке I вторая производная отрицательна, то график обращен выпуклостью вверх.

П р и м е р. Рассмотрим поведение функции cos на промежутках $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ и $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$.

Для удобства рассмотрения знаков производных функции cos составим таблицу:

	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$
$\cos' x (= -\sin x)$	< 0	< 0
$\cos'' x (= -\cos x)$	< 0	> 0

Из таблицы видно, что косинус на промежутке $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ убывает ускоренно (см. случай 4), а на промежутке $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ замедленно (см. случай 3).

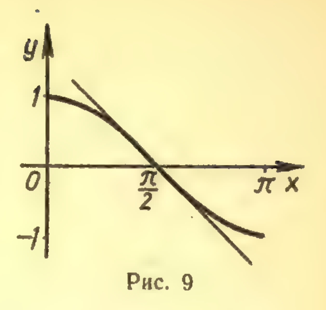
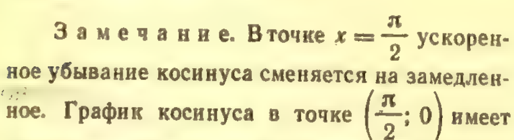


Рис. 9


Замечание. В точке $x = \frac{\pi}{2}$ ускоренное убывание косинуса сменяется на замедленное. График косинуса в точке $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ имеет «точку перегиба» (рис. 9). Уравнением касательной в этой точке будет уравнение

$$y = \frac{\pi}{2} - x.$$

Левее точки касания касательная проходит выше графика функции, а правее — ниже.◀

Упражнения

46*. Исследуйте с помощью производных первого и второго порядка поведение функции sin на промежутках:

а) $\left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[$; б) $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

47*. Исследуйте поведение функции tg на промежутках:

а) $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$; б) $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$; в) $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

48*. Напишите уравнения касательных к графику функции sin в точках с абсциссами $x = 0$, $x = \pi$. Объясните, почему эти точки являются точками перегиба.

49*. Напишите уравнение касательной к графику функции tg в точках с абсциссами $x = 0$, $x = -\pi$. Сделайте чертеж и объясните, почему эти точки являются точками перегиба.

50*. Вычислите вторую производную функции: а) $f(x) = 3 - 2x - x^2$; б) $g(x) = 6x^3 - 3x + 2$. Докажите, что график функции f на $]-\infty; \infty[$ обращен выпуклостью вверх, а график функции g — выпуклостью вниз.

51*. Вычислите вторую производную функции $f(x) = 3 - 3x^2 + x^3$ и докажите, что на промежутке $]-\infty; 1[$ график функции f обращен выпуклостью вверх, а на промежутке $]1; \infty[$ — выпуклостью вниз.

80. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

В предыдущем пункте было обнаружено интересное свойство функций sin и cos: их вторые производные только знаком отличаются от самих функций. Иначе говоря, обе эти функции удовлетво-

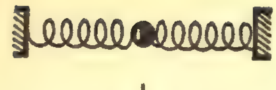


Рис. 10

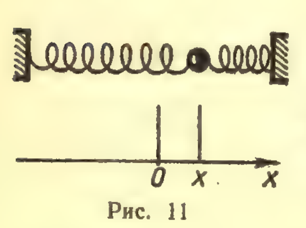


Рис. 11

ряют при всех значениях аргумента t уравнению

$$f''(t) = -f(t).$$

В физике, в частности в механике, большую роль играют функции f, которые удовлетворяют уравнению

$$f''(t) = -cf(t), \qquad (1)$$

где c — положительная константа.

▶ Разберем задачу из механики, приводящую к уравнению такого вида. Пусть к шарику массы m прикреплены две расположенные горизонтально пружины, другие концы которых закреплены (рис. 10). Пусть в состоянии равновесия координата x центра шарика равна нулю. При его смещении в положение с координатой центра $x \neq 0$ возникает сила, стремящаяся вернуть шарик в положение равновесия. По закону Гука эта сила пропорциональна смещению x:

$$F = -kx,$$

где k — положительная константа (рис. 11).

Из механики известно, что действующая на тело массы m сила связана с вызываемым ею ускорением формулой

$$ma = F.$$

Учитывая, что при движении по прямой ускорение есть вторая производная от координаты, имеем:

$$ma(t) = mx''(t) = F = -kx(t).$$

Иначе говоря, движение центра шарика под действием сил упругости пружин подчинено уравнению

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t),$$

т. е. уравнению вида (1).◀

Говорят, что физическая величина, изменяющаяся во времени в соответствии с уравнением (1), совершает *гармонические колебания.* Само уравнение (1) называют *дифференциальным уравнением гармонических колебаний.*

Замечание. Вообще, уравнение, выражающее зависимость между функцией и ее производными, называют *дифференциальным уравнением* (см. о дифференциальных уравнениях еще в п. 110).

Как же могут выглядеть функции, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (1) с какой-либо заданной положительной константой c? Оказывается, что таковы функции вида

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad (2)$$

где A, ω и φ — константы. В самом деле, из (2) вытекает:

$$f'(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi), \quad (3)$$
$$f''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi). \quad (4)$$

Из (2) и (4) получаем

$$f''(t) = -\omega^2 f(t), \quad (5)$$

т. е. уравнение вида (1), где

$$c = \omega^2. \quad (6)$$

Мы видим, что физическая величина, изменяющаяся во времени по закону (2), совершает гармоническое колебание. Верно и обратное, любая заданная на R функция f, удовлетворяющая уравнению (1), записывается в виде (2), где

$$\omega = \sqrt{c},\ A \geqslant 0,\ \varphi \in [0; 2\pi[. \quad (7)$$

Доказательство того, что любое решение дифференциального уравнения (1) имеет вид (2), выходит за рамки курса средней школы*.

Таким образом, формула (2) есть общая формула гармонических колебаний.

Ясно, что максимальное значение модуля функции f равно A. Константу A называют *амплитудой* колебания. Можно доказать, что функция f, заданная формулой (2), имеет периодом число

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Кроме неинтересного случая $A = 0$, этот период наименьший. Константу ω называют *частотой* колебания. Наконец, константу φ называют *начальной фазой* колебания.

▶ Вернемся к задаче с шариком. В силу сказанного шарик должен двигаться по закону

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \quad (8)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

В формуле (8) две константы A и φ остаются пока произвольными. Это и естественно: в зависимости от того, каковы положение и скорость шарика в какой-либо момент времени, принятый за начальный, двигаться он будет по-разному. Примем, например, что

---

* Легко проверить, что ограничения $A \geqslant 0$, $\varphi \in [0; 2\pi[$ не существенны: сняв их, мы не получим по формуле (2) новых решений.

в начальный момент времени $t = 0$ координата и скорость шарика заданы:

$$(0) = x_0, \qquad (9)$$
$$v(0) = v_0.$$

Из (8) и (9) получаем:

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi, \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi. \end{cases} \qquad (10)$$

Записав систему (10) в виде

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi, \\ -\dfrac{v_0}{\omega} = A\sin\varphi, \end{cases} \qquad (10a)$$

видим, что

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}. \qquad (11)$$

Константы A и φ суть не что иное, как длина и угол с осью абсцисс вектора $\vec{r}\left(x_0;\ \dfrac{v_0}{\omega}\right)$* с координатами x_0 и $\dfrac{v_0}{\omega}$.

Удобная формула для нахождения φ

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = -\frac{v_0}{\omega(x_0 + A)} \qquad (12)$$

будет обоснована в п. 90 (см. упр. № 259).

В задаче с шариком мы получили общий результат.◀

Чтобы из бесконечного множества решений уравнения гармонических колебаний (1) выделить одно-единственное решение, можно задать начальные условия:

$$f(0) = f_0, \quad f'(0) = f'_0.$$

При данных $c > 0$, f_0 и f'_0 уравнение

$$f''(t) = -cf(t)$$

имеет одно и только одно решение. Можно задать «начальные условия»

$$f(t_0) = f_0, \quad f'(t_0) = f'_0$$

и в любой другой точке t_0.

Упражнения

52. Напишите формулу гармонического колебания, в котором амплитуда равна 3,5, период $\frac{3}{2}\pi$, начальная фаза равна $\frac{\pi}{3}$. Чему равна частота этого колебания?

---

* Вектор (т. е. параллельный перенос) с координатами x и y обозначается $\vec{r}(x;\ y)$.

53. Движение точки задано уравнением

$$y(t) = 0{,}8 \sin\left(\frac{1}{3}t + \pi\right).$$

Чему равны период, амплитуда, начальная фаза и частота колебаний?

54. Преобразуйте правую часть уравнения

$$y = 2 \cdot \sin\frac{\pi}{6}\cos x + 2\sin x \cos\frac{\pi}{6}$$

к виду $A\cos(\omega x + \varphi)$. Чему равны период, амплитуда, начальная фаза и частота колебаний?

55. Преобразуйте правую часть

$$y = 3 \cdot \frac{1}{2}\cos 2x + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$$

так, чтобы уравнение представляло гармоническое колебание. Укажите его параметры.

56. Найдите какое-нибудь, отличное от $y \equiv 0$, решение дифференциального уравнения

$$y'' = -25y.$$

57. Проверьте, является ли функция $x = 3\cos(2t + \pi)$ решением дифференциального уравнения $x'' = -4x$.

58. Докажите, что функция $x = 2\cos 4t$ является решением уравнения $x'' = -16x$.

59. Является ли функция $x = 7\cos(3t + 5)$ решением дифференциального уравнения $x'' = -9x$?

81. Графики гармонических колебаний

1) Вам известно, что графики функций sin и cos — синусоиды, причем график косинуса получается из графика синуса параллельным переносом (горизонтально) влево на расстояние $\frac{\pi}{2}$. Это легко понять, заметив, что

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Вообще график функции

$$g(x) = f(x + a)$$

получается из графика функции f параллельным переносом на расстояние $|a|$: влево, если $a > 0$ $\left(\text{рис. 12; } a = \frac{\pi}{4}\right)$, и вправо, если $a < 0$ $\left(\text{рис. 13; } a = -\frac{\pi}{3}\right)$.

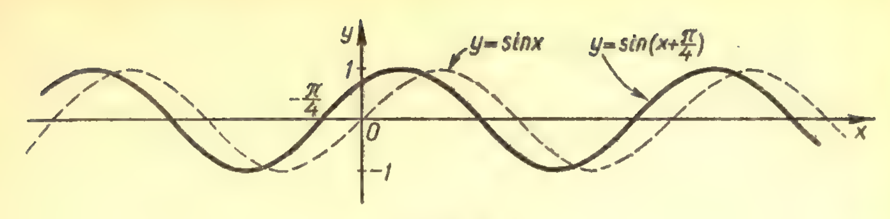


Рис. 12

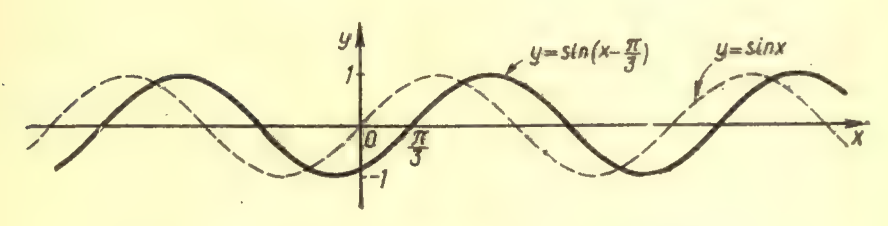


Рис. 13

2) Отображение числовой плоскости на себя

$$(x;\ y) \to (x;\ ky)$$

(где $k > 0$) называется при $k < 1$ *сжатием* к оси Ox в отношении $1:k$ и *растяжением* от оси Ox в отношении $1:k$ при $k > 1$. Конечно, можно и не различать термины «сжатие» и «растяжение» и в обоих случаях говорить о сжатии. Так мы и будем делать. При помощи этого отображения из графика функции f получается график функции

$$g(x) = kf(x).$$

В самом деле, уравнения

$$y = f(x) \text{ и } ky = g(x)$$

равносильны. Но первое из них обозначает, что точка $(x;\ y)$ лежит на графике функции f, а второе, что точка $(x;\ ky)$ лежит на графике функции g.

Пример 1. На рисунках 14 и 15 изображены графики функций $y = 4\cos x$ и $y = \frac{2}{3}\cos x$, получающиеся из графика функции $y = \cos x$ сжатием к оси Ox в отношении $1:4$ и $1:\frac{2}{3}$ соответственно. Для сравнения (штриховой линией) приведен исходный график.

3) Отображение числовой плоскости на себя

$$(x;\ y) \to (kx;\ y)$$

будем называть *сжатием к оси Oy в отношении* $1 : k$ (где $k > 0$). При помощи этого отображения из графика функции f получается график функции

$$g(x) = f\left(\frac{x}{k}\right).$$

В самом деле, $g(kx) = f\left(\frac{kx}{k}\right) = f(x)$, т. е. уравнения

$$y = f(x) \text{ и } y = g(kx)$$

равносильны, но первое из них обозначает, что точка $(x; y)$ лежит

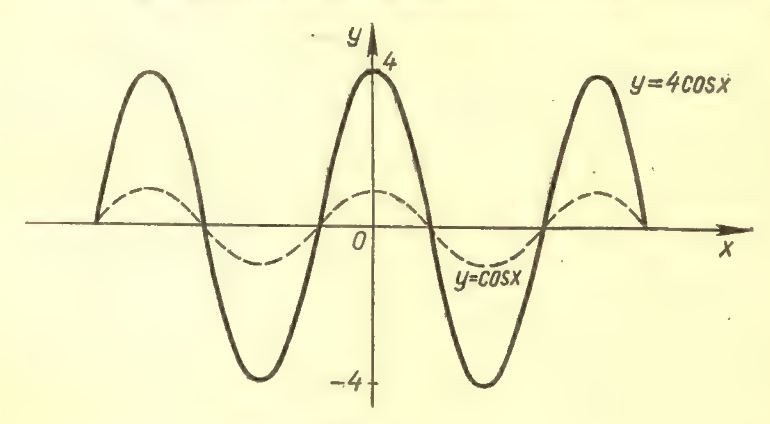


Рис. 14

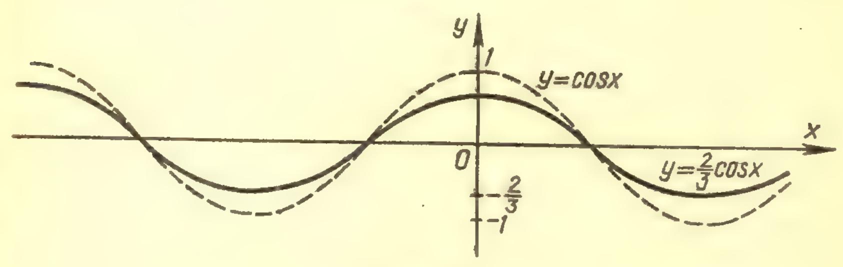


Рис. 15

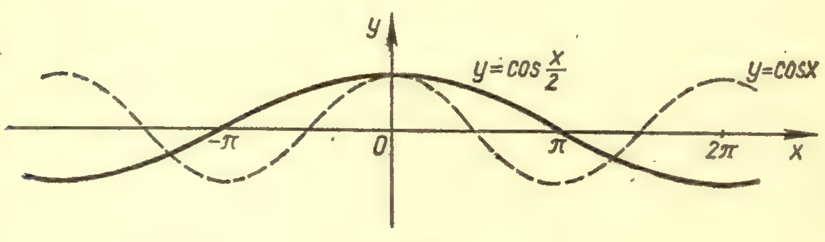


Рис. 16

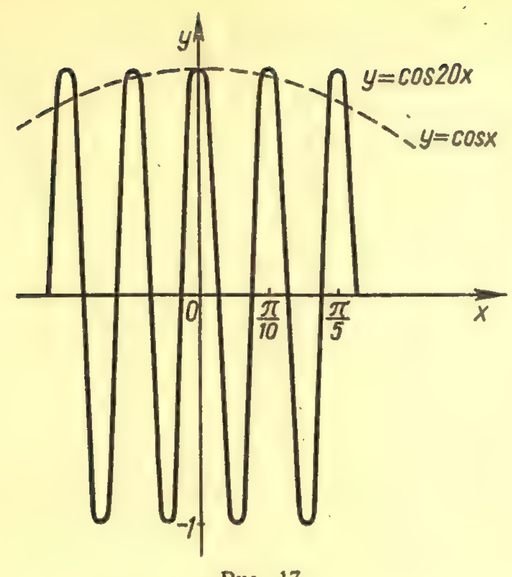


Рис. 17

на графике функции f, а второе, что соответствующая точка $(kx; y)$ принадлежит графику функции g.

Пример 2. На рисунках 16 и 17 изображены графики функций $y = \cos\frac{x}{2}$ и $y = \cos 20x$, получающиеся из графика функции $y = \cos x$ сжатием к оси Oy в отношении $1:2$ и $1:\frac{1}{20}$ соответственно. Для сравнения (штриховой линией) приведен исходный график.

4) Покажем теперь, как из графика косинуса получается график функции

$$y = A\cos(\omega x + \varphi),\ A > 0,\ \omega > 0. \qquad (1)$$

▶ По третьему из установленных выше правил преобразования графиков из графика

$$y = \cos x$$

сжатием к оси Oy в отношении $1:\frac{1}{\omega}$ получим график функции $\cos \omega x$.

Из этого графика при помощи параллельного переноса на расстояние $\frac{|\varphi|}{\omega}$ вправо при $\varphi < 0$ и влево при $\varphi > 0$ получим график функции $\cos(\omega x + \varphi)$.

Наконец, из графика этой функции по второму правилу сжатием к оси Ox в отношении $k = \frac{1}{A}$ получим график заданной функции (1).◀

График функции (1) получается из графика косинуса такой последовательностью преобразований: 1) сжатием к оси Oy в отношении $1 : \frac{1}{\omega}$; 2) параллельным переносом $\vec{r}\left(-\frac{\varphi}{\omega};\ 0\right)$; 3) сжатием к оси Ox в отношении $1 : A$.

Пример 3. График функции $y = 3\cos(2x + 4)$ получается из графика косинуса следующей последовательностью преобразований:

1) сжатием к оси Oy в отношении $1 : \frac{1}{2}$ (рис. 18);

2) параллельным переносом $\vec{r}(-2;\ 0)$ (рис. 19);

3) сжатием к оси Ox в отношении 1:3 (рис. 20).

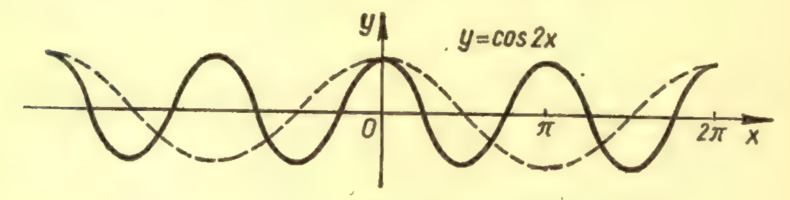


Рис. 18

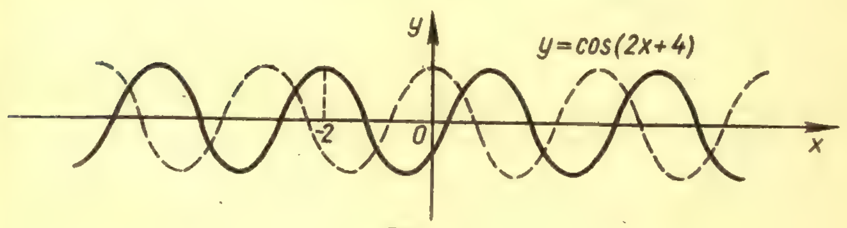


Рис. 19

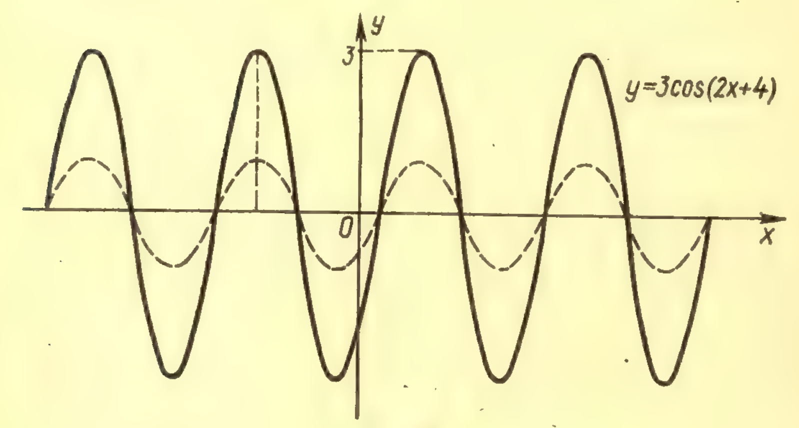


Рис. 20

Упражнения

С помощью каких преобразований из графика функции $y = \cos x$ можно получить график функции:

60. $f(x) = \sin 2x$.

61. $f(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$.

62. $g(x) = 4\sin x$.

63. $g(x) = \frac{2}{3}\cos x$.

64. $v(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

65. $v(x) = \cos(x - 3)$.

66. $F(x) = 2\cos(3x - 2)$.

67. $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x + 5)$.

68*. График функции $y = \cos x$ подвергли преобразованиям: 1) сжатию к оси Oy в отношении $1 : \frac{1}{4}$; 2) переносу $\vec{r}\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$; 3) сжатию к оси Ox в отношении $1 : 5$; 4) переносу $\vec{r}(0; -3)$. График какой функции получился? Запишите ее.

82. Сложение гармонических колебаний с общим периодом

В физике часто встречаются величины, которые можно представить в виде суммы величин, совершающих гармонические колебания. В случае двух слагаемых такие величины изменяются во времени по закону

$$f(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2). \qquad (1)$$

Имеет место замечательный факт: если частоты ω_1 и ω_2 совпадают, то сумма f есть гармоническое колебание:

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi). \qquad (2)$$

Здесь $\omega = \omega_1 = \omega_2$, а константы A и φ можно вычислить, зная константы A_1, A_2, φ_1, φ_2. Но соответствующие формулы сложны (см. упр. 260). Сейчас мы покажем, что высказанное общее утверждение можно доказать без громоздких вычислений. В самом деле, функции

$$f_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1),\ f_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

удовлетворяют уравнению гармонических колебаний

$$f_1''(t) = -kf_1(t),\ f_2''(t) = -kf_2(t),$$

где $k = \omega^2$.

Для их суммы

$$f = f_1 + f_2$$

находим:

$$f''(t) = f_1''(t) + f_2''(t) = -kf_1(t) - kf_2(t) =$$
$$= -k(f_1(t) + f_2(t)) = -kf(t),$$

т. е. она тоже удовлетворяет уравнению гармонических колебаний с $k = \omega^2$ и, следовательно, записывается в виде (2). Еще один способ доказательства указан в упражнении 70.

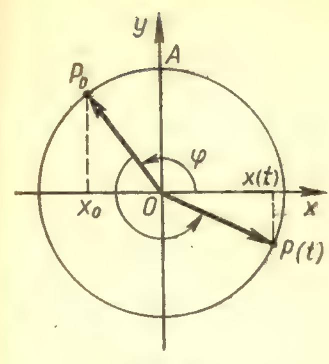


Рис. 21а

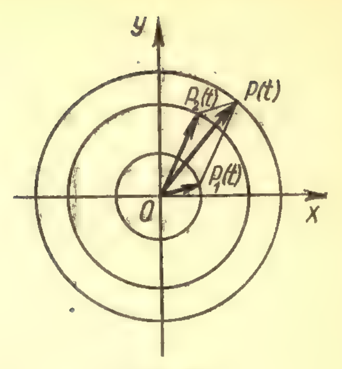


Рис. 21б

Упражнения

69. Пусть точка $P(t)$ равномерно движется по окружности числовой плоскости радиуса A с центром в начале координат против часовой стрелки, проходя ω радианов за единицу времени. Пусть вектор $\overrightarrow{OP}$ с начальным положением $\overrightarrow{OP_0}$ образует угол φ с положительным направлением оси Ox (рис. 21а). Покажите, что координата проекции точки $P(t)$ на ось Ox совершает гармоническое колебание, и определите соответствующие константы A, ω и φ.

70. Воспользуйтесь результатом упражнения 69 для того, чтобы показать, что сумма двух гармонических колебаний с общей частотой является гармоническим колебанием с той же частотой.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь тем, что сумма $\overrightarrow{OP}(t)$ векторов $\overrightarrow{OP_1}(t)$ и $\overrightarrow{OP_2}(t)$, вращающихся с одинаковой угловой скоростью, вращается с той же скоростью (рис. 21б).

§ 17.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

83. Формулы приведения

Число 2π является периодом функций sin и cos. Так как любое число x можно записать в виде

$$x = 2\pi n + u, \text{ где } 0 \leqslant u < 2\pi, \ n \in \mathbf{Z}$$

то нахождение значений sin и cos при любом x сводится к нахождению значений этих функций от аргумента u, лежащего в пределах $0 \leqslant u < 2\pi$. Можно, однако, пойти дальше, сведя нахождение

синуса и косинуса для таких u к вычислению синуса или косинуса для α из промежутка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Нужные для этого формулы сведены в первых трех строках следующей таблицы:

	u	$\sin u$	$\cos u$
1	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
2	$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
3	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$
4	$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$
5	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
6	$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
7	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$

В четвертой строке приведены формулы, выражающие то обстоятельство, что синус есть нечетная функция, а косинус — четная. Строки 5—7 получаются из строк 1—3 заменой α на $-\alpha$ в соответствии со строкой 4.

Нахождение значений тригонометрических функций от углов, измеренных в градусах, сводится к вычислению значений для углов в пределах от 0 до 90°. Именно в этих пределах значения тригонометрических функций даются в таблицах.

Выписанные выше формулы называют «формулами приведения» для синуса и косинуса.

Формулы первой строки приведенной таблицы легко вывести, используя теоремы сложения для синуса и косинуса:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha=$$
$$=1\cdot\cos\alpha+0\cdot\sin\alpha=\cos\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha=$$
$$=0\cdot\cos\alpha-1\cdot\sin\alpha=-\sin\alpha.$$

(Другое доказательство приведено в п. 102 учебника геометрии для VIII класса.)

Формулы приведения для углов $\pi+\alpha$ и $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ также получаются с помощью теорем сложения.

Можно, однако, поступить и следующим образом:

$$\sin(\pi+\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\cos(\pi+\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$$
$$=-(-\sin\alpha)=\sin\alpha.$$

Функции tg и ctg имеют период π. Так как любое число x можно записать в виде

$$x=\pi n+u, \text{ где } 0\leqslant u<\pi,\ n\in \boldsymbol{Z},$$

то нахождение значений tg и ctg при любом x сводится к случаю значений аргумента u в пределах $0\leqslant u<\pi$. Для перехода к аргументу α из промежутка $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ достаточно первой строки следующей таблицы (формул приведения для тангенса и котангенса):

	u	$\operatorname{tg} u$	$\operatorname{ctg} u$
1	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
2	$-\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
3	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

Во второй строке приведены формулы, выражающие то обстоятельство, что тангенс и котангенс — нечетные функции. Строка 3 получается из строки 1 заменой α на $-\alpha$ в соответствии со строкой 2.

Формулы первой строки этой таблицы легко получить из формул приведения для синуса и косинуса:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Существуют различные мнемонические правила, позволяющие вспомнить формулы приведения. Например:

Если в формуле приведения угол α вычитается из числа $\frac{\pi}{2}$ или прибавляется к этому числу, взятому нечетное число раз, то приводимая функция меняется на кофункцию; если же число $\frac{\pi}{2}$ взято четное число раз, то название приводимой функции сохраняется. Знак перед приведенной функцией ставится такой, каков знак приводимой функции в соответствующей четверти, считая угол α острым.

Обычно формулы приведения применяют при упрощении тригонометрических выражений одновременно со свойствами периодичности тригонометрических функций (вспомним, что у синуса и косинуса период равен 2π, а у тангенса и котангенса равен π). Рассмотрим примеры.

Пример 1. Приведем к тригонометрической функции острого угла $\sin 2281°$.

$$\sin 2281° = \sin (360° \cdot 6 + 121°) = \sin 121° =$$
$$= \sin (90° + 31°) = \cos 31°.$$

Здесь сначала отбросили период 360°, взятый 6 раз, а потом 121° представили в виде суммы 90° + 31°.

Пример 2. Приведем к тригонометрической функции острого угла $\operatorname{tg} 26{,}9\pi$.

$$\operatorname{tg} 26{,}9\pi = \operatorname{tg} (26\pi + 0{,}9\pi) = \operatorname{tg} 0{,}9\pi = \operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{10}\right) =$$
$$= \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}.$$

Здесь сначала отбросили период тангенса — число π, а потом заметили, что $0{,}9\pi$ — число большее, чем $\frac{\pi}{2}$, и применили формулу приведения. Выгоднее применить формулу для числа $\pi - \alpha$, чем $\frac{\pi}{2} + \alpha$, так как $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5} = 0{,}9\pi$; $\pi - 0{,}1\pi = 0{,}9\pi$, а $0{,}1\pi < \frac{2\pi}{5}$.

Упражнения

Приведите к значению тригонометрической функции положительного угла, меньшего 45°:

71. $\cos 89°$. **73.** $\operatorname{tg} 68°$. **75.** $\sin 48°12'$.
72. $\sin 71°$. **74.** $\operatorname{ctg} 47°$. **76.** $\cos 89°49'$.

С помощью формул приведения замените данное значение значением тригонометрической функции острого угла:

77. $\cos 108°$. 79. $\sin 115°12'$. 81. $\text{tg}\, 165°$. 83. $\text{ctg}\, 171°$.
78. $\sin 162°$. 80. $\cos 179°42'$. 82. $\text{tg}\, 104°$. 84. $\text{ctg}\, 168°$.

Приведите к значению тригонометрической функции угла первой четверти:

85. $\sin \frac{3}{4}\pi$. 88. $\cos \frac{9}{10}\pi$. 91. $\text{ctg} \frac{5}{9}\pi$. 94. $\cos 100°$.
86. $\sin \frac{2}{3}\pi$. 89. $\text{tg} \frac{3}{4}\pi$. 92. $\text{ctg} \frac{17}{18}\pi$. 95. $\sin 120°$.
87. $\cos \frac{4}{5}\pi$. 90. $\text{tg} \frac{7}{10}\pi$. 93. $\sin 172°$. 96. $\cos 135°$.

Приведите выражение к значению тригонометрической функции наименьшего положительного аргумента:

97. $\sin \frac{29\pi}{12}$. 101. $\sin 2\frac{1}{7}\pi$. 105. $\text{tg}\,(-300°)$.
98. $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$. 102. $\cos 2{,}1\pi$. 106. $\sin 1600°$.
99. $\text{tg}\left(-\frac{21\pi}{5}\right)$. 103. $\sin(-3729°)$. 107. $\text{ctg}\,(-205°)$.
100. $\text{ctg}\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$. 104. $\cos 1825°$. 108. $\text{tg}\, 3672°$.

Докажите тождество:

109. $\sin(45° + \alpha) = \cos(45° - \alpha)$.
110. $\cos(45° + \alpha) = \sin(45° - \alpha)$.
111. $\text{tg}\,(180° - \alpha) = \text{ctg}\,(90° + \alpha)$.
112. $\text{tg}\, x + \text{tg}\,(\pi - x) + \text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \text{tg}\,(2\pi - x)$.

Упростите:

113. $2\,\text{tg}\, y - \text{tg}\,(y - \pi) - \text{ctg}\left(y - \frac{3\pi}{2}\right)$.
114. $\frac{\sin(-\alpha)}{\sin(180° - \alpha)} - \frac{\text{tg}\,(90° + \alpha)}{\text{ctg}\,\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin(90° + \alpha)}$.
115. $\frac{\text{tg}\,(180° - \alpha)\cos(180° - \alpha)\,\text{tg}\,(90° - \alpha)}{\sin(90° + \alpha)\,\text{ctg}\,(90° + \alpha)\,\text{tg}\,(90° + \alpha)}$.
116. $\frac{\text{tg}\,(270° - \alpha)\sin 130° \cos 320° \sin 270°}{\text{ctg}\,(180° - \alpha)\cos 50° \sin 220° \cos 360°}$.

Вычислите:

117. $10\,\text{ctg}\, 135° \cdot \sin 225° \cdot \cos 315°$.
118. $8 \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{3} \cdot \text{tg}\, 240° \cdot \text{ctg}\, 210°$.

84. Обратная функция к непрерывной возрастающей (убывающей) функции

С обратными функциями вы встречались в седьмом и восьмом классах. Например, на промежутке $[0; \infty[$ функция $x \to x^2$ имеет обратную функцию $x \to \sqrt{x}$. При этом по существу вы уже пользовались теоремой, которая будет сформулирована в этом пункте.

Напомним, что две функции f и g называются взаимно обратными, если $D(f) = E(g)$, $E(f) = D(g)$ и $y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow x_0 = g(y_0)$ для любых $x_0 \in D(f)$ и $y_0 \in D(g)$. Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$ (см. упр. **1008—1013**).

Относительно обратных функций известна следующая теорема (ее доказательство выходит за рамки школьного курса):

Теорема. ***Если функция f определена, непрерывна и возрастает (убывает) на промежутке I, то множество ее значений есть некоторый промежуток J*** (рис. 22). ***На этом промежутке J определена функция g, обратная функции f. Функция g также непрерывна. Если f возрастает на промежутке I, то g возрастает на промежутке J*** (рис. 23а). ***Если f убывает на промежутке I, то g убывает на промежутке J*** (рис. 23б).

85. Свойства и график функции синус. Функция арксинус и решение уравнения $\sin x = a$

Рассмотрим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 24). По общей схеме исследования находим производную:

$$\sin' x = \cos x.$$

Найдем критические точки. Так как $\cos x = 0$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ только при $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$, то эти точки являются критическими. Возрастание и убывание функции указаны в таблице.

x	$-\pi$	$\left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[$	$-\frac{\pi}{2}$	$\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$	$\frac{\pi}{2}$	$\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$	π
$\sin' x$	-1	$-$	0	$+$	0	$-$	-1
$\sin x$	0	↘	-1	↗	1	↘	0
			min		max		

Ввиду того что функция синус имеет период 2π, ее график переходит в себя при параллельном переносе $\vec{r}\,(2\pi; 0)$. Следовательно, график функции sin на $[-\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n]$ получается из гра-

Рис. 22

Рис. 23 а

Рис. 23 б

Рис. 24

фика, изображенного на рисунке 24, с помощью параллельного переноса $\vec{r}\,(2\pi n;\ 0)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 25).

Функция синус на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает и в силу непрерывности принимает все значения из отрезка $[-1;\ 1]$. Поэтому функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ обратима, т. е. имеет обратную функцию, которую называют *арксинус* и обозначают arcsin. График функции $y = \arcsin x$ изображен на рисунке 26. Этот график симметричен графику функции $y=\sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, относительно прямой $y = x$. Из определения обратной функции следует, что $D\,(\arcsin)=[-1;\ 1]$, $E\,(\arcsin)=\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ и что арксинус есть нечетная и возрастающая функция.

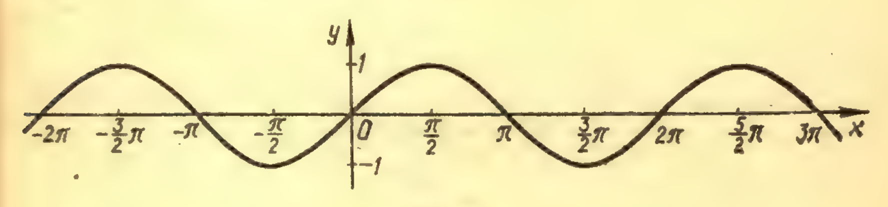


Рис. 25

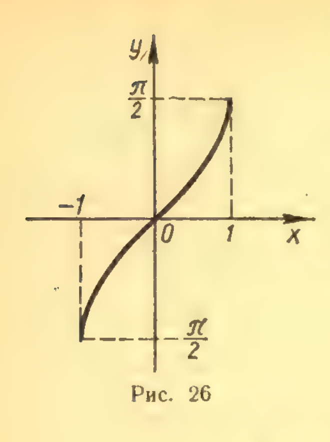


Рис. 26

Вычислим несколько значений арксинуса.

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4},\ \text{так как}\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{и}\ \frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6},\ \text{так как}\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\ \text{и}\ -\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];$$

$$\arcsin 1=\frac{\pi}{2},\ \text{так как}\ \sin\frac{\pi}{2}=1\ \text{и}\ \frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];$$

$$\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2},\ \text{так как}\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1\ \text{и}\ -\frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

Значения функции arcsin с двумя десятичными знаками проще всего находить по таблице функции sin от числового аргумента. Для вычисления значений с четырьмя знаками пользуются двумя таблицами: синусов углов, выраженных в градусах, и перевода градусной меры углов в радианную. При этом пользуются тем, что синус числа y равен синусу угла в y радиан.

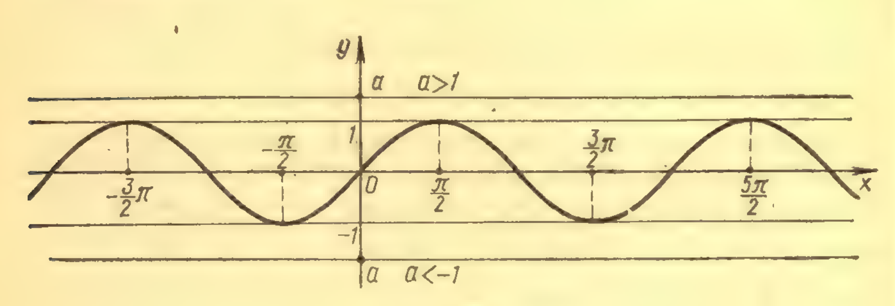


Рис. 27

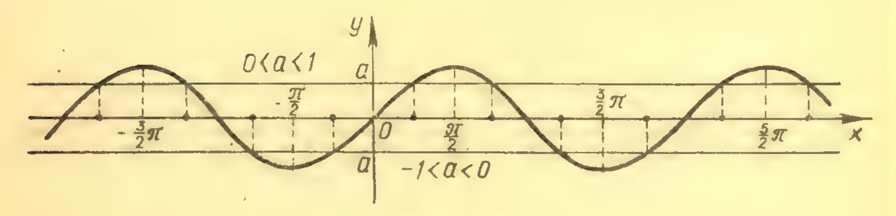


Рис. 28

Чтобы найти arcsin x, находят угол α° в пределах $-90^\circ \leqslant \alpha^\circ \leqslant 90^\circ$, для которого

$$\sin \alpha^\circ = x,$$

выражают α° в радианах:

$$\alpha^\circ = y \text{ рад}$$

и получают

$$\sin y = x,$$
$$\arcsin x = y.$$

Пример 1. Найдем arcsin 0,9063.

$$0{,}9063 \approx \sin 65^\circ,$$
$$65^\circ \approx 1{,}1345 \text{ рад},$$
$$\arcsin 0{,}9063 \approx 1{,}1345.$$

Покажем, как введенная функция арксинус помогает решать простейшие уравнения вида

$$\sin x = a. \quad (1)$$

Так как $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, то при $a > 1$ и $a < -1$ уравнение (1) решений не имеет (рис. 27).

При $a = 1$ уравнение (1) принимает вид $\sin x = 1$ и имеет решения

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \; k \in \boldsymbol{Z}.$$

При $a = -1$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \; k \in \boldsymbol{Z}.$$

Чтобы найти все решения уравнения (1) при $|a| < 1$, достаточно найти все решения этого уравнения на любом отрезке длины 2π, так как период синуса равен 2π. Из рисунка 28 видно, что удобно взять отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$. Действительно, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ синус возрастает и принимает каждое свое значение один раз. А на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ синус убывает и принимает каждое свое значение тоже один раз. Следовательно, на каждом из этих двух отрезков уравнение (1) имеет по одному решению. Решение уравнения (1), принадлежащее отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ есть $\arcsin a$ по определению арксинуса.

Для того чтобы найти решение уравнения (1), принадлежащее отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$, воспользуемся формулой

$$\sin x = \sin (\pi - x).$$

Если $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$, то $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (объясните почему).

Уравнение

$$\sin x = a$$

равносильно уравнению

$$\sin (\pi - x) = a.$$

А так как $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$\pi - x = \arcsin a,$$

т. е.

$$x = \pi - \arcsin a.$$

Теперь, чтобы записать все решения уравнения (1), следует воспользоваться периодичностью синуса, т. е. к каждому из двух полученных решений прибавить числа вида $2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Получаем, что множество решений состоит из двух бесконечных подмножеств:

$$x = \arcsin a + \pi 2m, \quad (2)$$

$$x = -\arcsin a + \pi (2m + 1). \quad (3)$$

Заметим, что формулы (2) и (3) объединяются в одну:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}. \quad (4)$$

Действительно, при четном k из формулы (4) получается формула (2), а при нечетном k — формула (3) (проверьте это, подставив в формулу (4) $k = 2m$ и $k = 2m + 1$).

Замечание. При $a = 1$ и при $a = -1$ множества решений, определяемые формулами (2) и (3), совпадают.

Пример 2. Решим уравнение

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

По формуле (4) получаем:

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z};$$

так как $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ (см. выше), то

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 3. Решим уравнение

$$\sin x = 1.$$

По формуле (4) получаем:

$$x = (-1)^k \arcsin 1 + \pi k;$$

так как $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ (см. выше), то

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

При четных $k = 2m$ имеем: $x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$. При нечетных $k = 2m + 1$ получаем: $x = -\frac{\pi}{2} + (2m + 1)\pi = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$. Отсюда видно, что при $a = 1$ запись решения упрощается:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \quad m \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 4. Решим уравнение

$$\sin x = 0.$$

По формуле (4) получаем:

$$x = (-1)^k \arcsin 0 + \pi k.$$

Так как $\sin 0 = 0$ и $0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin 0 = 0$, поэтому $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 5. Решим уравнение

$$\sin x = 0{,}932.$$

По формуле (4) получаем:

$$x = (-1)^k \arcsin 0{,}932 + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z},$$
$$\text{где } \arcsin 0{,}932 \approx 1{,}2.$$

Приближенное значение арксинуса найдено по таблицам Брадиса.

Перечислим теперь основные свойства синуса.

1. Область определения функции — вся числовая прямая:

$$D(\sin) = \boldsymbol{R}.$$

2. Множество значений синуса — отрезок $[-1; 1]$: $E(\sin) = [-1; 1]$, т. е. синус — ограниченная функция.
3. Синус — нечетная функция: $\sin(-x) = -\sin x$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$.
4. Синус — периодическая функция с наименьшим положительным периодом 2π: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$.
5. $\sin x = 0$ для всех $x = \pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.
6. $\sin x > 0$ для всех $x \in]2\pi n; \pi + 2\pi n[$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
7. $\sin x < 0$ для всех $x \in]\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n[$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

8. Функция синус непрерывна и имеет производную в каждой точке числовой прямой.

9. Функция синус возрастает от —1 до 1 в промежутках

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n \in \boldsymbol{Z}.$$

10. Функция синус убывает от 1 до —1 в промежутках

$$\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3}{2}\pi+2\pi n\right], n \in \boldsymbol{Z}.$$

11. Синус имеет минимумы, равные —1, в точках

$$x=\frac{3}{2}\pi+2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

12. Синус имеет максимумы, равные 1, при всех

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Упражнения

Докажите, что:

119. $\sin 2{,}3\pi = \sin 0{,}3\pi$.

120. $\sin(-330°) = -\sin 330°$.

121. $\sin 3{,}7\pi = -\sin 0{,}3\pi$.

122. $\sin 15° < \sin 75° < \sin 86°$.

123. $\sin 2{,}16 > 0$.

124. $\sin 4{,}5 < 0$.

125. $\sin 95° > \sin 105° > \sin 175°$.

Отметьте на единичной окружности множество точек P_t, для которых соответствующие значения синуса удовлетворяют неравенству или уравнению:

126. $\sin t < \frac{1}{2}$.

127. $\sin t < 0$.

128. $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

129. $\sin t = 0$.

130. $\sin t \geqslant 1$.

131. $\sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

132. $\sin t > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

133. $\sin t \leqslant \frac{1}{2}$.

134. $\sin t = 1$.

135. $\sin t < 1$.

136. $\sin t > -2$.

Найдите значение арксинуса:

137. $\arcsin \frac{1}{2}$.

138. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$.

139. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$.

140. $\arcsin 0$.

141. $\arcsin 1$.

Решите уравнение:

142. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

143. $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

144. $\sin \frac{1}{2} x = 0{,}5$.

145. $\sin x = 0{,}6$.

146. $\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = -0{,}5$.

86. Свойства и график функции косинус. Функция арккосинус и решение уравнения $\cos x = a$

Для исследования графика функции $y = \cos x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 29) находим производную:

$$\cos' x = -\sin x.$$

Найдем критические точки. Так как $\sin x = 0$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ только в точках $x = -\pi$, $x = 0$ и $x = \pi$, то эти точки являются критическими (поскольку это внутренние точки области определения косинуса). Возрастание и убывание функции указаны в таблице.

x	$-\pi$	$]-\pi; 0[$	0	$]0; \pi[$	π
$\cos' x$	0	+	0	−	0
$\cos x$	−1	↗	1	↘	−1
	min		max		min

Ввиду того что период функции косинус равен 2π, ее график переходит в себя при параллельном переносе $\vec{r}\,(2\pi; 0)$. Следовательно, график функции косинус на $[-\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n]$ получается из графика, изображенного на рисунке 29, при параллельном переносе $\vec{r}\,(2\pi n; 0)$, $n \in \mathbf{Z}$ (рис. 30).

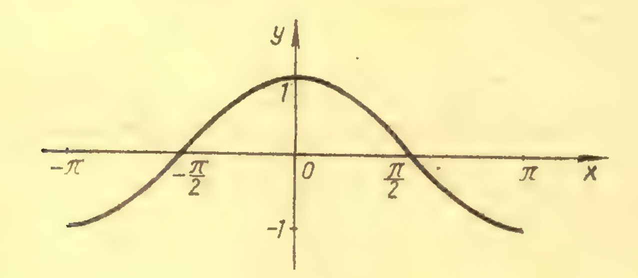


Рис. 29

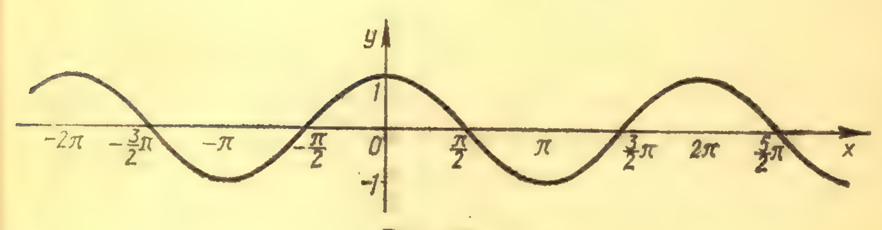


Рис. 30

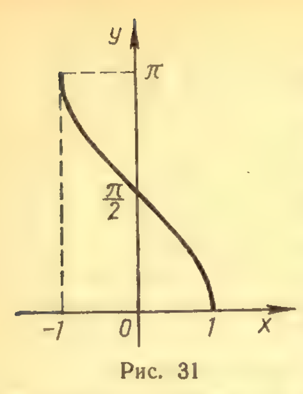


Рис. 31

Из равенства $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ видно, что график функции косинус получается из графика функции синус параллельным переносом $\vec{r}\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$. Поэтому график функции косинус — это сдвинутая влево на $\frac{\pi}{2}$ синусоида.

Функция косинус на отрезке $[0;\ \pi]$ убывает и в силу непрерывности принимает все значения из отрезка $[-1;\ 1]$. Поэтому функция $y=\cos x$ на отрезке $[0;\ \pi]$ обратима. Обратную функцию по отношению к косинусу на отрезке $[0;\ \pi]$ называют *арккосинус* и обозначают arccos. График функции $y=\arccos x$ изображен на рисунке 31. Этот график симметричен графику функции $y=\cos x$, $x\in[0;\ \pi]$, относительно прямой $y=x$. Из определения обратной функции следует, что $D(\arccos)=[-1;\ 1]$, $E(\arccos)=[0;\ \pi]$ и что арккосинус — убывающая функция.

Вычислим несколько значений арккосинуса:

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}, \text{ так как } \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \frac{\pi}{6}\in[0;\ \pi],$$

$$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}, \text{ так как } \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \text{ и } \frac{\pi}{3}\in[0;\ \pi],$$

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}, \text{ так как } \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \frac{\pi}{4}\in[0;\ \pi],$$

$$\arccos 0=\frac{\pi}{2}, \text{ так как } \cos\frac{\pi}{2}=0 \text{ и } \frac{\pi}{2}\in[0;\ \pi],$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}, \text{ так как } \cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \frac{3\pi}{4}\in[0;\ \pi].$$

Значения функции arccos с четырьмя десятичными знаками находят с помощью двух таблиц: косинусов углов, выраженных в градусах, и перевода градусной меры углов в радианную.

Чтобы найти $\arccos x$, находят угол α° в пределах $0^\circ\leqslant\alpha^\circ\leqslant 180^\circ$, для которого

$$\cos\alpha^\circ=x,$$

выражают α° в радианах:

$$\alpha^\circ=y \text{ рад},$$

и получают

$$\cos y=x, \qquad \arccos x=y.$$

Пример 1. Найдем arccos 0,8746.

$$0{,}8746\approx\cos 29^\circ,$$
$$29^\circ\approx 0{,}5061 \text{ рад},$$
$$\arccos 0{,}8746\approx 0{,}5061.$$

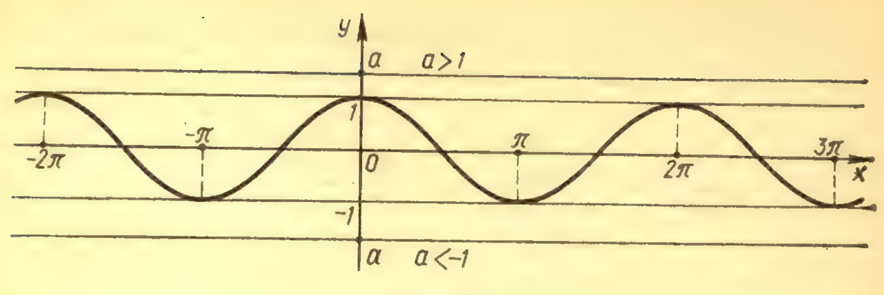


Рис. 32

Покажем, как введенная функция арккосинус помогает решать простейшие уравнения

$$\cos x = a. \qquad (1)$$

Так как $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, то при $a > 1$ и $a < -1$ уравнение (1) решений не имеет (рис. 32).

При $a = 1$ уравнение (1) имеет решения

$$x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

При $a = -1$

$$x = \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Чтобы найти все решения уравнения (1) при $|a| < 1$, достаточно найти все его решения на любом отрезке длины 2π, так как период косинуса равен 2π. Из рисунка 33 видно, что удобно взять отрезок $[-\pi; \pi]$. В самом деле, на отрезке $[0; \pi]$ косинус убывает и принимает каждое свое значение один раз. А на отрезке $[-\pi; 0]$ косинус возрастает и принимает каждое свое значение тоже один раз. Следовательно, на каждом из этих двух отрезков уравнение (1) имеет по одному решению. Решение уравнения (1) на отрезке $[0; \pi]$ по определению есть $\arccos a$. Решение уравнения (1) на отрезке $[-\pi; 0]$ равно $-\arccos a$ ввиду четности функции косинус. Таким образом, решениями уравнения (1) на отрезке $[-\pi; \pi]$ будут числа $\pm \arccos a$. Теперь, чтобы записать все решения уравнения (1), следует воспользоваться периодичностью косинуса, т. е. к каж-

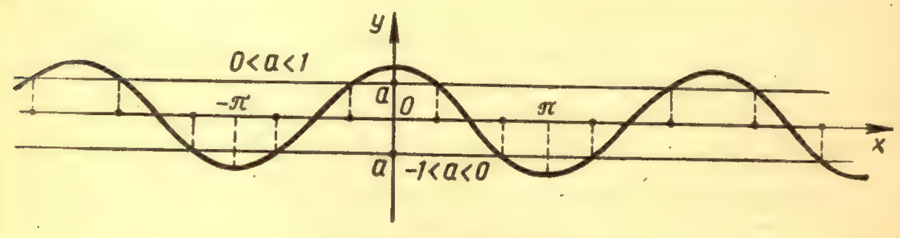


Рис. 33

дому из двух найденных решений прибавить числа вида $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; получаем два бесконечных множества решений:

$$x = \arccos a + 2\pi n, \qquad (2)$$

$$x = -\arccos a + 2\pi n. \qquad (3)$$

Полученные множества принято записывать с помощью одной формулы:

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (4)$$

Пример 2. Решим уравнение

$$\cos x = \frac{1}{2}.$$

По формуле (4) получаем:

$$x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi k, \text{ где } k \in \boldsymbol{Z},$$

или

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \text{ где } k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 3. Решим уравнение

$$\cos x = -1.$$

По формуле (4) получаем:

$$x = \pm\arccos(-1) + 2\pi m, \text{ где } m \in \boldsymbol{Z},$$

или

$$x = \pm\pi + 2\pi m, \text{ где } m \in \boldsymbol{Z}.$$

Перепишем ответ в виде

$$x = \pi(2m \pm 1).$$

Так как множества $\{2m + 1 \mid m \in \boldsymbol{Z}\}$ и $\{2m - 1 \mid m \in \boldsymbol{Z}\}$ совпадают (это множество нечетных чисел), то вместо знаков $\pm$ пишут $+$ или $-$:

$$x = \pi(2m + 1), \text{ где } m \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 4. Решим уравнение

$$\cos x = 0.$$

По формуле (4) имеем:

$$x = \pm\arccos 0 + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z},$$

или

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Перепишем ответ в виде

$$x = \frac{\pi}{2}(4k \pm 1), \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Множество $\{4k \pm 1 \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$ — это множество нечетных чисел (объясните почему), т. е. множество $\{2n + 1 \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$. Поэтому ответ можно записать так:

$$x = \frac{\pi}{2}(2n + 1), \text{ где } n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 5.

$$\cos x = -0{,}2756.$$

Пользуясь формулой (4), имеем:

$$x = \pm \arccos(-0{,}2756) + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

По таблице находим

$$\arccos(-0{,}2756) \approx 1{,}85,$$

поэтому

$$x \approx \pm 1{,}85 + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Перечислим теперь основные свойства косинуса.

1. Область определения функции — вся числовая прямая:

$$D(\cos) = \boldsymbol{R}.$$

2. Множество значений косинуса — отрезок $[-1; 1]$: $E(\cos) = [-1; 1]$, т. е. косинус — ограниченная функция.

3. Косинус — четная функция: $\cos(-x) = \cos x$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$.

4. Косинус — периодическая функция с наименьшим положительным периодом 2π: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$.

5. $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$.

6. $\cos x > 0$ для всех $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right[, \ n \in \boldsymbol{Z}$.

7. $\cos x < 0$ для всех $x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right[, \ n \in \boldsymbol{Z}$.

8. Функция косинус непрерывна и имеет производную в каждой точке числовой прямой.

9. Функция косинус убывает от 1 до -1 в промежутках $[2\pi n; \pi + 2\pi n], \ n \in \boldsymbol{Z}$.

10. Функция косинус возрастает от -1 до 1 в промежутках $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n], \ n \in \boldsymbol{Z}$.

11. Косинус имеет максимумы, равные 1, при всех $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

12. Косинус имеет минимумы, равные -1, при всех $x = \pi + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

Докажите, что:

147. $\cos 8{,}4\pi = \cos 0{,}4\pi$.

148. $\cos(-130^\circ) = \cos 130^\circ$.

149. $\cos 495^\circ = -\cos 45^\circ$.

150. $\cos 15^\circ > \cos 70^\circ > \cos 85^\circ$.

151. $\cos 2{,}65 < 0$.

152. $\cos 98^\circ > \cos 108^\circ > \cos 118^\circ$.

Отметьте на единичной окружности множество точек P_t, для которых соответствующее значение косинуса удовлетворяет неравенству или уравнению:

153. $\cos t < \frac{1}{2}$.

154. $\cos t > 0$.

155. $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

156. $\cos t = 0$.

157. $\cos t < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

158. $\cos t > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

159. $\cos t = \frac{1}{2}$.

160. $\cos t = 1$.

Найдите значение арккосинуса:

161. $\arccos \frac{1}{2}$.

162. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$.

163. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.

164. $\arccos 0$.

165. $\arccos 1$.

166. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

167. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

168. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

169. $\arccos(-1)$.

Решите уравнение:

170. а) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$; в) $\cos \frac{1}{3} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}7$.

Вместо звездочки поставьте знак равенства или неравенства, чтобы получилось истинное высказывание:

171. а) $\arccos \frac{1}{2} * \arcsin \frac{1}{2}$; б) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} * \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$.

172. $\arcsin 0 * \arccos 0$.

173. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} * \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.

174. $\arccos 1 * \arcsin 1$.

Найдите значение суммы:

175. $\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2}$.

176. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$.

177. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.

178. $\arcsin 0 + \arccos 0$.

179. $\arcsin 1 + \arccos 1$.

180*. Пользуясь формулой для нахождения производной обратной функции (см. п. 112, стр. 118), докажите, что

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

181*. Докажите, что:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

87. Свойства и график функции тангенс. Функция арктангенс и решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$

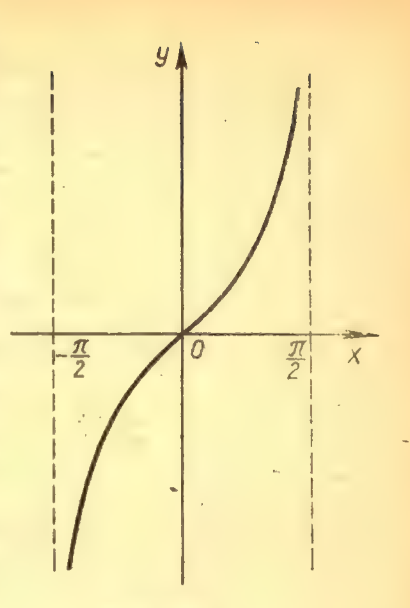


Рис. 34

Так как наименьший положительный период функции тангенс равен π, то для изучения свойств функции $y = \operatorname{tg} x$ достаточно изучить их на любом промежутке длины π. Возьмем промежуток $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Концы промежутка исключены, так как в них функция тангенс не определена. Для построения графика найдем производную:

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Выражение $\frac{1}{\cos^2 x}$ положительно при всех значениях аргумента (исключая $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, в которых не определены тангенс и его производная). Значит, функция тангенс возрастает на всем промежутке $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Учитывая нечетность функции тангенс, строим сначала график функции тангенс на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, а потом на промежутке $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ (точки графика симметричны относительно начала координат) (рис. 34).

Ввиду того что период функции тангенс равен π, ее график переходит в себя при параллельном переносе $\vec{r}(\pi; 0)$. Следовательно, график функции тангенс на $\left]-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right[$ получается из графика, изображенного на рисунке 34, при параллельном переносе $\vec{r}(\pi n; 0)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 35).

На промежутке $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ тангенс возрастает и принимает все числовые значения: $E(\operatorname{tg}) =]-\infty; \infty[$, т. е. все значения из $\boldsymbol{R}$. Из возрастания следует, что на промежутке $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ функция тангенс обратима. Обратную функцию по отношению к тангенсу на промежутке $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ называют *арктангенс* и обозначают

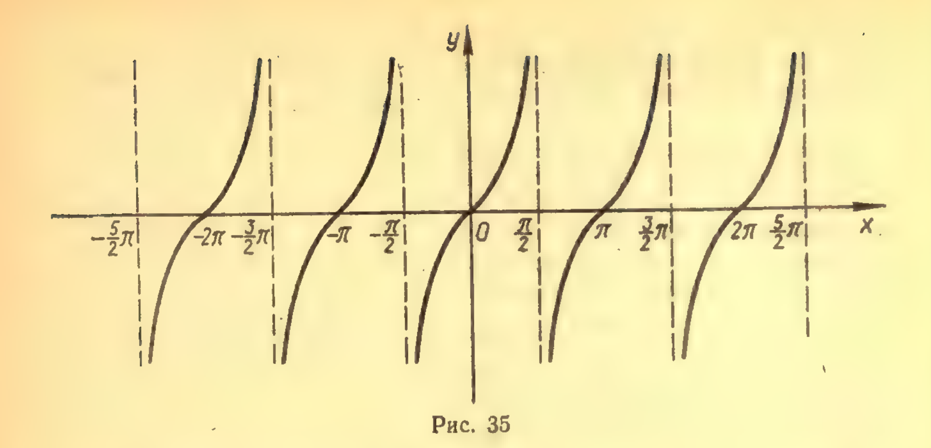


Рис. 35

arctg. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ изображен на рисунке 36. Этот график симметричен графику функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ относительно прямой $y = x$. Из определения обратной функции следует, что $D(\operatorname{arctg}) =]-\infty; \infty[$, $E(\operatorname{arctg}) = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ и что арктангенс — возрастающая функция.

Вычислим несколько значений арктангенса.

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \text{ так как } \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \text{ и } \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[,$$

$$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}, \text{ так как } \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и } \frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[,$$

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}, \text{ так как } \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\text{и } -\frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[.$$

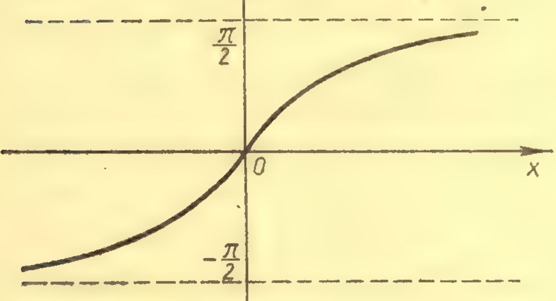


Рис. 36

Значения функции arctg с четырьмя десятичными знаками находят с помощью таблиц тангенсов углов, выраженных в градусах, и перевода градусной меры углов в радианную.

Чтобы найти arctg x, находят угол α° в пределах $-90^\circ < \alpha^\circ < 90^\circ$, для которого

$$\operatorname{tg} \alpha^\circ = x,$$

выражают α° в радианах:

$$\alpha^\circ = y \text{ рад},$$

и получают

$$\operatorname{tg} y = x,$$
$$\operatorname{arctg} x = y.$$

Пример 1. Найдем arctg 2,747.

$$2{,}747 \approx \operatorname{tg} 70^\circ,$$
$$70^\circ \approx 1{,}2217 \text{ рад},$$
$$\operatorname{arctg} 2{,}747 \approx 1{,}2217.$$

Покажем, как введенная функция арктангенс помогает решать простейшие уравнения

$$\operatorname{tg} x = a. \qquad (1)$$

Чтобы найти все решения уравнения (1), достаточно найти все решения этого уравнения на любом отрезке длины π (так как период тангенса равен π). Из рисунка 37 видно, что удобно взять промежуток $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Решение уравнения (1) на промежутке $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ есть arctg a, по определению арктангенса. Пользуясь периодичностью функции тангенс (т. е. к arctg a надо прибавить числа вида πn, $n \in \mathbf{Z}$), получаем решения:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \text{ где } n \in \mathbf{Z}. \qquad (2)$$

Пример 2. Решим уравнение

$$\operatorname{tg} x = 1.$$

По формуле (2) имеем:

$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 3. Решим уравнение

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$$

По формуле (2) получаем

$$x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

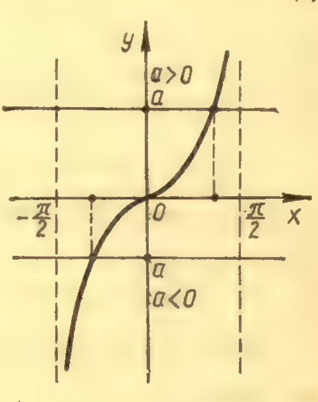


Рис. 37

Пример 4. Решим уравнение $\operatorname{tg} x = 5{,}177$.

По формуле (2) получаем $x = \operatorname{arctg} 5{,}177 + \pi k$, $x \approx 1{,}38 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Перечислим основные свойства тангенса.

1. Область определения функции — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. Множество значений тангенса — вся числовая прямая: $E(\operatorname{tg}) = \boldsymbol{R}$. Таким образом, тангенс — функция неограниченная.

3. Тангенс — нечетная функция: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ для всех $x \in D(\operatorname{tg})$.

4. Тангенс — периодическая функция, с наименьшим положительным периодом π: $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ для всех $x \in D(\operatorname{tg})$.

5. $\operatorname{tg} x = 0$ для всех $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. $\operatorname{tg} x > 0$ для всех $x \in \left]\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right[$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

7. $\operatorname{tg} x < 0$ для всех $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right[$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

8. Функция tg непрерывна и имеет производную для всех $x \in D(\operatorname{tg})$.

9. Тангенс возрастает в каждом промежутке

$$\left]-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right[, \text{ где } n \in \boldsymbol{Z}.$$

Упражнения

Докажите, что:

182. $\operatorname{tg} 200^\circ = \operatorname{tg} 20^\circ$.

183. $\operatorname{tg} 21{,}2\pi = \operatorname{tg} 0{,}2\pi$.

184. $\operatorname{tg}(-300^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ$.

185. $\operatorname{tg} 6\pi = \operatorname{tg} 0 = 0$.

186. $\operatorname{tg} 3{,}6\pi = \operatorname{tg}(-0{,}4\pi) = -\operatorname{tg} 0{,}4\pi$.

187. $\operatorname{tg} 3 = \operatorname{tg}(3 - \pi) = -\operatorname{tg}(\pi - 3)$.

188. $\operatorname{tg} 10^\circ < \operatorname{tg} 15^\circ < \operatorname{tg} 30^\circ < \operatorname{tg} 60^\circ < \operatorname{tg} 75^\circ$.

189. $\operatorname{tg}(-75^\circ) < \operatorname{tg}(-60^\circ) < \operatorname{tg}(-30^\circ) < \operatorname{tg}(-15^\circ) < \operatorname{tg}(-10^\circ)$.

Отметьте на единичной окружности множество точек P_t, для которых соответствующее значение тангенса удовлетворяет неравенству или уравнению:

190. $0 \leqslant \operatorname{tg} t \leqslant 1$.

191. $-2 < \operatorname{tg} t \leqslant -1$.

192. $\operatorname{tg} t = 2{,}5$.

193. $\operatorname{tg} t = -4{,}5$.

194. $\operatorname{tg} t = 0$.

Найдите значение арктангенса:

195. $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$. **196.** $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$. **197.** $\operatorname{arctg} 1$. **198.** $\operatorname{arctg} 0$.

Решите уравнение:

199. $\operatorname{tg} x = 1$.

200. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

201. $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$.

202. $\operatorname{tg} 3x = 3{,}5$.

203. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4} x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

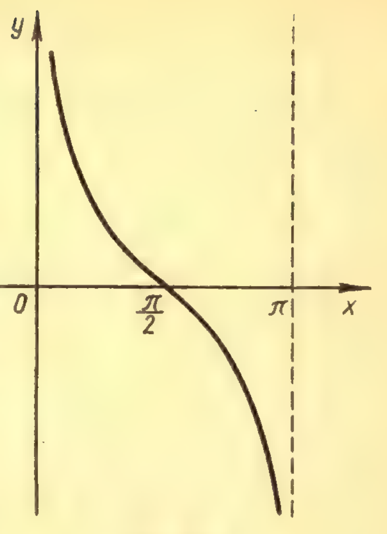


Рис. 38

88*. Свойства и график функции котангенс. Функция арккотангенс и решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$

Так как наименьший положительный период функции котангенс равен π, то для изучения свойств функции $y = \operatorname{ctg} x$ достаточно изучить их на любом промежутке длины π. Возьмем промежуток $]0; \pi[$. Концы промежутка исключены, так как в них функция котангенс не определена. Для изучения графика найдем производную:

$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Выражение $-\frac{1}{\sin^2 x}$ отрицательно при всех значениях аргумента (исключая $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, в которых не определены котангенс и его производная). Значит, функция котангенс убывает на всем промежутке $]0; \pi[$. Учитывая проведенное исследование и то, что $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$, строим график (рис. 38).

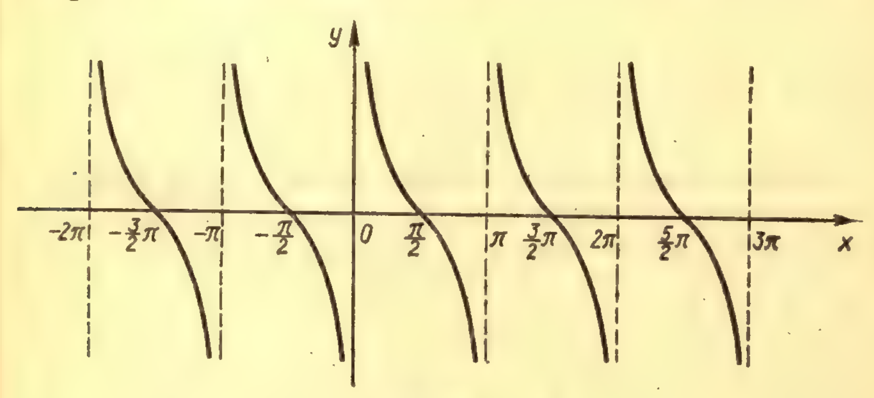


Рис. 39

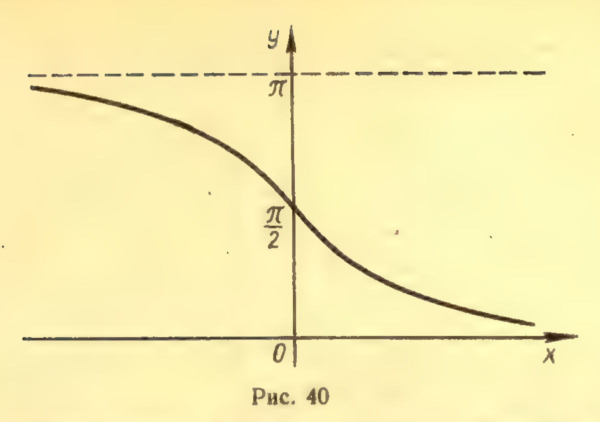


Рис. 40

Ввиду того что период функции котангенс равен π, ее график переходит в себя при параллельном переносе $\vec{r}\,(\pi;\,0)$. Следовательно, график функции котангенс на $]\pi n;\ \pi(n+1)[$ получается из графика, изображенного на рисунке 38, при параллельном переносе $\vec{r}\,(\pi n;\,0)$, $n \in \mathbf{Z}$ (рис. 39).

На промежутке $]0;\ \pi[$ котангенс убывает и принимает все значения числовой прямой $\boldsymbol{R}$, т. е. для области значений имеем: $E\,(\mathrm{ctg}) =]-\infty;\ \infty[$. Поэтому на промежутке $]0;\ \pi[$ функция котангенс обратима. Обратную функцию по отношению к котангенсу на промежутке $]0;\ \pi[$ называют *арккотангенс* и обозначают arcctg. График функции $y = \mathrm{arcctg}\,x$ изображен на рисунке 40. Этот график симметричен графику функции $y = \mathrm{ctg}\,x$ относительно прямой $y = x$. Из определения обратной функции следует, что $D\,(\mathrm{arcctg}) =]-\infty;\ \infty[$, $E\,(\mathrm{arcctg}) =]0;\ \pi[$ и что функция арккотангенс — убывающая функция.

Вычислим несколько значений арккотангенса:

$$\mathrm{arcctg}\,\sqrt{3} = \frac{\pi}{6},\ \text{так как}\ \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\ \text{и}\ \frac{\pi}{6} \in]0;\ \pi[,$$

$$\mathrm{arcctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3},\ \text{так как}\ \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{и}\ \frac{\pi}{3} \in]0;\ \pi[,$$

$$\mathrm{arcctg}\,(-1) = \frac{3\pi}{4},\ \text{так как}\ \mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{4} = -1\ \text{и}\ \frac{3\pi}{4} \in]0;\ \pi[.$$

Значения функции arcctg находят с помощью таблиц котангенсов углов, выраженных в градусах, и перевода градусной меры углов в радианную.

Чтобы найти $\mathrm{arcctg}\,x$ с четырьмя десятичными знаками, находят угол α° в пределах $0^\circ < \alpha^\circ < 180^\circ$, для которого

$$\mathrm{ctg}\,\alpha^\circ = x,$$

выражают α° в радианах:

$$\alpha^\circ = y\ \textit{рад},$$

и получают

$$\operatorname{ctg} y = x, \qquad \operatorname{arcctg} x = y.$$

Пример 1. Найдем arcctg 3,078.

$$3{,}078 \approx \operatorname{ctg} 18^\circ,$$
$$18^\circ \approx 0{,}3142,$$
$$\operatorname{arcctg} 3{,}078 \approx 0{,}3142.$$

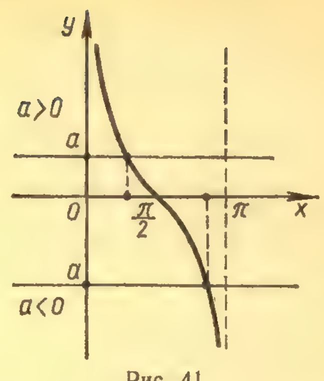


Рис. 41

Покажем, как введенная функция арккотангенс помогает решать уравнения

$$\operatorname{ctg} x = a. \qquad (1)$$

Чтобы найти все решения уравнения (1), достаточно найти все решения этого уравнения на любом отрезке длины π, так как периодом котангенса является число π. Из рисунка 41 видно, что удобно взять промежуток $]0; \pi[$. Решение уравнения (1) на промежутке $]0; \pi[$ по определению арккотангенса есть $\operatorname{arcctg} a$. Теперь, чтобы записать все решения уравнения (1), следует воспользоваться периодичностью функции котангенс, т. е. к $\operatorname{arcctg} a$ прибавить числа вида πn, $n \in \mathbf{Z}$; получаем решение

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \text{ где } n \in \mathbf{Z}. \qquad (2)$$

Пример 2. Решим уравнение

$$\operatorname{ctg} x = 1.$$

По формуле (2) имеем:

$$x = \operatorname{arcctg} 1 + \pi k, \ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 3. Решим уравнение

$$\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}.$$

По формуле (2) получаем:

$$x = \operatorname{arcctg} \sqrt{3} + \pi k, \ x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Перечислим основные свойства котангенса.

1. Область определения функции — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида πn, где $n \in \mathbf{Z}$.

2. Множество значений котангенса — вся числовая прямая: $E(\operatorname{ctg}) = \mathbf{R}$. Таким образом, котангенс — функция неограниченная.

3. Котангенс — нечетная функция: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ для всех $x \in D(\operatorname{ctg})$.

4. Котангенс — периодическая функция с наименьшим положительным периодом π: $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$ для всех $x \in D(\operatorname{ctg})$.

5. $\operatorname{ctg} x = 0$ для всех $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. $\operatorname{ctg} x > 0$ для всех $x \in]\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n[$, $n \in \mathbf{Z}$.

7. $\operatorname{ctg} x < 0$ для всех $x \in]-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n[$, $n \in \mathbf{Z}$.

8. Функция ctg непрерывна и дифференцируема для всех $x \in D$ (ctg).

9. Функция ctg убывает в каждом промежутке $]\pi n;\ \pi + \pi n[$, $n \in \mathbf{Z}$.

***Упражнения* ***

Докажите, что:

204. $\operatorname{ctg} 312° = -\operatorname{ctg} 48°$.
205. $\operatorname{ctg} 17{,}3\pi = \operatorname{ctg} 0{,}3\pi$.
206. $\operatorname{ctg} (-320°) = \operatorname{ctg} 40°$.
207. $\operatorname{ctg} 6{,}4\pi = \operatorname{ctg} (-0{,}6\pi) = -\operatorname{ctg} 0{,}6\pi$.
208. $\operatorname{ctg} 7\frac{1}{2}\pi = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$.
209. $\operatorname{ctg} 5° > \operatorname{ctg} 15° > \operatorname{ctg} 31° > \operatorname{ctg} 45°$.
210. $\operatorname{ctg} (-4°) < \operatorname{ctg} (-14°) < \operatorname{ctg} (-28°) < \operatorname{ctg} (-45°)$.

Отметьте на единичной окружности множество точек P_t, для которых соответствующее значение котангенса удовлетворяет неравенству или уравнению:

211. $0 \leqslant \operatorname{ctg} t \leqslant 1$.
212. $-2 \leqslant \operatorname{ctg} t \leqslant 2$.
213. $\operatorname{ctg} t = 1{,}5$.
214. $\operatorname{ctg} t = 0$.

Найдите значение арккотангенса:

215. $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$.
216. $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$.
217. $\operatorname{arcctg} 1$.
218. $\operatorname{arcctg} 0$.
219. $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.
220. $\operatorname{arcctg}(-1)$.
221. $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Вместо звездочки поставьте знак равенства или неравенства, чтобы получилось истинное высказывание:

222. $\operatorname{arcctg} 1 * \operatorname{arctg} 1$.
223. $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} * \operatorname{arctg}\sqrt{3}$.
224. $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} * \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$.
225. $\operatorname{arcctg} 0 * \operatorname{arctg} 0$.
226. $\operatorname{arcctg} 2 * \operatorname{arctg} 2$.

Найдите значение суммы:

227. $\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg}\sqrt{3}$.
228. $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$.
229. $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arcctg} 1$.
230. $\operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arcctg} 0$.

231. Пользуясь формулой для нахождения производной обратной функции (см. п. 112), докажите, что

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2},$$
$$\operatorname{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

232. Докажите, что:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Решите уравнение:

233. $\operatorname{ctg} x = 1$.

234. $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} x = \sqrt{3}$.

235. $\operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

236. $\operatorname{ctg} 3x = 3{,}5$.

237. $\operatorname{ctg} \frac{1}{5} x = 0$.

§ 18.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА И УРАВНЕНИЯ

89. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Как вы знаете, между четырьмя тригонометрическими функциями синус, косинус, тангенс и котангенс существует три основных соотношения:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \qquad (3)$$

Из этих соотношений можно получить и ряд других зависимостей между ними. Вам уже встречались случаи, когда требовалось доказывать тождества с помощью этих основных соотношений.

Соотношение (1) справедливо при всех значениях $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

Формула (2) имеет место при всех α, для которых $\operatorname{tg} \alpha$ определен, т. е. для всех α, принадлежащих $\boldsymbol{R}$, кроме α вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Соотношение (3) справедливо при всех α, для которых котангенс определен, т. е. для всех $\alpha \in \boldsymbol{R}$, кроме α вида πn, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Из формул (1)—(3) можно вывести двенадцать формул, которые в явном виде выражают значение одной из функций через соответствующие значения другой (см. таблицу на стр. 54).

Дано:	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha = a$	a	$\pm\sqrt{1-a^2}$	$\pm\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$
$\cos\alpha = a$	$\pm\sqrt{1-a^2}$	a	$\pm\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$\pm\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$
$\operatorname{tg}\alpha = a$	$\pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	a	$\frac{1}{a}$
$\operatorname{ctg}\alpha = a$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	$\pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\frac{1}{a}$	a

Например, если $\sin\alpha = a$, то

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-a^2}, \tag{4}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \tag{5}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}. \tag{6}$$

Вывод этих формул из формул (1)—(3), как будет показано ниже, довольно прост. Но внимания требуют: 1) смысл двойных знаков $\pm$; 2) особые случаи, когда при определенных значениях переменной a выражение теряет смысл.

Рассмотрим подробнее несколько примеров.

Пример 1. Пусть $|a| \leqslant 1$ и $\sin\alpha = a$. Найдем значение $\cos\alpha$.

По формуле (1)

$$\cos^2\alpha + a^2 = 1,$$

$$\cos^2\alpha = 1 - a^2,$$

$$\cos\alpha = +\sqrt{1-a^2} \text{ или } \cos\alpha = -\sqrt{1-a^2}.$$

Покажем, что для любого a, удовлетворяющего условию $|a| \leqslant 1$, оба ответа годятся. Пусть α_1 есть корень уравнения $\sin\alpha = a$. Тогда для $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ по формуле приведения

$$\sin\alpha_2 = \sin(\pi - \alpha_1) = \sin\alpha_1,$$

т. е. α_2 тоже корень уравнения $\sin\alpha = a$. Но по другой формуле приведения

$$\cos\alpha_2 = \cos(\pi - \alpha_1) = -\cos\alpha_1.$$

Если $\cos\alpha_1 = \sqrt{1-a^2}$, то $\cos\alpha_2 = -\sqrt{1-a^2}$; если же $\cos\alpha_1 = -\sqrt{1-a^2}$, то $\cos\alpha_2 = \sqrt{1-a^2}$.

Теперь видно, что формула (4) действительно дает решение задачи.

Однозначно найти по заданному $\sin\alpha = a$ значение $\cos\alpha$ можно, если указано, в какой четверти расположено α. Например, если известно, что $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\cos\alpha = \pm\frac{1}{2}$. Но если дополнительно известно, что α находится в IV четверти, то косинус определяется однозначно: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Пусть $|a| \leqslant 1$ и $\sin\alpha = a$. Найдем значение $\operatorname{tg}\alpha$. Из (1) и (2) получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \text{ или } \operatorname{tg}\alpha = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Как и в примере 1, оба ответа годятся. В самом деле, если для α_1 и $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = a,$$

то

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}(\pi - \alpha_1) = -\operatorname{tg}\alpha_1,$$

так что если верно решение одного знака, то верно и решение противоположного знака.

Если знаменатель $\sqrt{1-a^2}$ правой части формулы (5) обращается в нуль (при $a = \pm 1$), то $\sin\alpha = \pm 1$ и $\cos\alpha = 0$, а $\operatorname{tg}\alpha$ не определен.

Во всех остальных случаях положение аналогично:

1) если формула приводит к двум ответам, то оба они верны. Однозначный ответ получается только при дополнительном указании четверти, в которой находится α;

2) если знаменатель выражения для $\operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{ctg}\alpha$ обращается при каком-либо значении a в нуль, то для соответствующих α $\operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{ctg}\alpha$ не определены.

Рассмотрим теперь конкретные примеры с числовыми данными.

Пример 3. Известно, что $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$. Найдем значения остальных тригонометрических функций.

Значения $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ находим по формулам (4)—(6):

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = \mp\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}{-\frac{1}{2}} = \mp\sqrt{3}.$$

Получили две серии решений: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$ и $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$.

Пример 4. Найдем значения остальных тригонометрических функций, если $\sin\alpha = -\frac{1}{7}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{5\pi}{2}$.

По условию α находится либо в I, либо в IV четверти. Так как $\sin\alpha = -\frac{1}{7} < 0$, то α — число IV четверти. В четвертой четверти косинус положителен, поэтому из двух решений, даваемых формулой (4), условию задачи удовлетворяет только одно — положительное. Следовательно,

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7},\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4\sqrt{3}},\ \operatorname{ctg}\alpha = -4\sqrt{3}.$$

Пример 5. Найдем $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4}{3},$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16},\ \cos\alpha = -\frac{4}{5},$$

$$\sin\alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}.$$

Упражнения

238. Известно, что $\sin\alpha = -0{,}8$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

239. Найдите $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -7$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Упростите выражение:

240. $\sin^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha + \sin^2\alpha - 1$.

241. $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cdot(1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha$.

242. $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

243. $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x\sin^2 x$.

Докажите тождество:

244. $\frac{1}{\cos x} - \sin x\operatorname{tg} x = \cos x$.

245. $\sin^2 x\sin^2 y + \sin^2 x\cos^2 y + \cos^2 x = 1$.

246. $(\sin x \cos y + \cos x \sin y)^2 + (\cos x \cos y - \sin x \sin y)^2 = 1$.

247*. $\sin^3 x\,(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x\,(1 + \operatorname{tg} x) = \sin x + \cos x$.

248*. Дано: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = m$. Найдите $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

Решите уравнение:

249. $2 \sin^2 x = 3 \cos x$.

250. $4 \cos^2 x - 8 \sin x + 1 = 0$.

90. Тригонометрические функции половинного аргумента

Если в формулах

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x, \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1,$$

выведенных в IX классе (п. 73), положить $x = \frac{\alpha}{2}$, получим

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1.$$

Отсюда можно выразить $\sin \frac{\alpha}{2}$ и $\cos \frac{\alpha}{2}$ через $\cos \alpha$:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \tag{1}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}. \tag{2}$$

С помощью формул (1) и (2) можно вычислять значения синуса и косинуса половинного аргумента $\frac{\alpha}{2}$ по заданному косинусу аргумента α. Почленное деление равенства (1) на равенство (2) дает формулу для вычисления $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}. \tag{3}$$

Как и в п. 89, можно показать, что $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ определяются по $\cos \alpha$ лишь с точностью до знака, т. е. в формулах (1)—(3) надо брать оба знака. Если задано дополнительное условие — в какой четверти находится $\frac{\alpha}{2}$, то значения $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ определяются однозначно.

Умножим числитель и знаменатель подкоренного выражения правой части формулы (3) на $1 + \cos \alpha$, тогда после упрощений получим:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Но оказывается, что

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (4)$$

Действительно,

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Если умножить числитель и знаменатель подкоренного выражения правой части формулы (3) на $1-\cos\alpha$ и выполнить упрощения, то будем иметь:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Докажите самостоятельно, что

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (5)$$

Формулы (4) и (5) менее удобны, чем (3), так как в них приходится, зная $\cos\alpha$, находить и $\sin\alpha$ или, зная $\sin\alpha$, находить $\cos\alpha$, в то время как для пользования формулой (3) достаточно знание одного лишь косинуса. Но формулы (4) и (5) не содержат знаки $\pm$ и корня и тем самым имеют преимущество перед формулой (3).

Пример 1. Найдем $\sin 15^\circ$ без таблиц:

$$\sin 15^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Пример 2. Найдем значение $\operatorname{tg}112^\circ30'$ без таблиц:

$$\operatorname{tg}112^\circ30'=-\sqrt{\frac{1-\cos 225^\circ}{1+\cos 225^\circ}}=-\sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{1-\cos 45^\circ}}=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}.$$

Пример 3. Найдем $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=0{,}8$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Угол $\frac{\alpha}{2}$ находится в первой четверти, поэтому перед корнем надо во всех случаях ставить знак плюс:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-0{,}8}{2}}=\sqrt{0{,}1}\approx 0{,}316,$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+0{,}8}{2}}=\sqrt{0{,}9}=3\sqrt{0{,}1}\approx 0{,}949,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-0{,}8}{1+0{,}8}}=\sqrt{\frac{0{,}1}{0{,}9}}=\frac{1}{3}\approx 0{,}333.$$

Упражнения

251. Дано: $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

252. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Докажите тождество:

253. $1 + \sin x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

254. $1 - \sin x = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

Упростите выражение:

255. $\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha} \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha$.

256. $\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \sin^2\alpha$.

257. $\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha} - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

258. $1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

259*. Докажите формулу (12) п. 80, пользуясь формулой (4):

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = -\frac{v_0}{\omega(x_0 + A)}.$$

260*. Пусть сумма гармонических колебаний

$f_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$, $\quad f_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$

записывается в виде

$$f_1(t) + f_2(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Покажите, что

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A + A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

91. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

В п. 89 было показано, как по известному значению одной из тригонометрических функций можно вычислить значения остальных тригонометрических функций того же аргумента. Однако при этом результаты обычно получаются неоднозначные. В то же время при решении тригонометрических уравнений, доказательстве неравенств и т. п. часто желательно все четыре функции

$$\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x \text{ и } \operatorname{ctg} x$$

выразить рационально через какую-либо одну функцию $f(x)$.

В данном пункте будет показано, как выражаются значения всех тригонометрических функций через функцию $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. При этом мы воспользуемся тригонометрическими формулами двойного аргумента. Так как $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ и $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$, то для получения выражения, в котором имеется только $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, достаточно разделить правые части на $\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1$. Тогда получим:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}.$$

Теперь разделим числитель и знаменатель на $\cos^2\frac{x}{2}$; получим:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \tag{1}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \tag{2}$$

При этом надо учитывать область определения рассматриваемых функций и дробей. В данном случае $x \neq (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Выразим остальные тригонометрические функции через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, используя формулу тангенса двойного аргумента:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \tag{3}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}. \tag{4}$$

При этом надо учитывать область определения рассматриваемых функций и дробей. Формула (3) теряет смысл при

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$, и $x = \pi + 2\pi l,\ l \in \boldsymbol{Z}$, а формула (4) — при $x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример. Решим уравнение

$$3\cos x + 4\sin x = 5.$$

Заменим синус и косинус выражениями с тангенсом половинного аргумента. Получим (при $x \neq (2k+1)\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$):

$$\frac{3\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{4\left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 5.$$

Обозначив $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ через y и упростив уравнение, получим:

$$4y^2 - 4y + 1 = 0,$$

$$y = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 0{,}5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} 0{,}5 + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

$$x \approx 2 \cdot 0{,}464 + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

$$x \approx 0{,}928 + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

При решении были исключены числа вида $(2k+1)\pi$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Для таких x имеем $\cos x = -1$; $\sin x = 0$ и $3\cos x + 4\sin x = -3 \neq 5$. Таким образом, в данном случае при применении формул (1) и (2) корней потеряно не было.

Ответ. $x \approx 0{,}928 + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

261. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 3$.

262. Дано: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2$. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

263. Найдите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ и $\operatorname{ctg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$.

264. Найдите значения $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = 8$.

265. Найдите $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

92*. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

Часто при доказательстве тригонометрических тождеств, решении уравнений, упрощении выражений, а также при нахождении первообразных функций (см. п. 98) бывает полезно заданные произведения тригонометрических функций представить в виде суммы

тригонометрических функций. Формулы для преобразования произведения тригонометрических функций в сумму можно получить из формул сложения — косинуса и синуса суммы и разности (см. п. 71).

Запишем синус суммы и синус разности аргументов α и β:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha, \tag{1}$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha. \tag{2}$$

Почленное сложение равенств (1) и (2) и деление на 2 обеих частей полученного равенства дает формулу:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)). \tag{3}$$

Пример 1. Представим в виде суммы тригонометрических функций произведение $\sin 75^\circ \cos 15^\circ$.

По формуле (3) имеем:

$$\sin 75^\circ\cos 15^\circ=\frac{1}{2}(\sin(75^\circ+15^\circ)+\sin(75^\circ-15^\circ))=$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 90^\circ+\sin 60^\circ)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Запишем косинус суммы и косинус разности аргументов α и β:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \tag{4}$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \tag{5}$$

Сложив почленно равенства (4) и (5) и разделив полученное равенство на 2, получим формулу:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)) \tag{6}$$

Вычтя почленно из равенства (5) равенство (4), получим:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)). \tag{7}$$

Пример 2. Представим в виде суммы тригонометрических функций

$$\cos^2 x\cos 3x.$$

Сначала заменим $\cos^2 x$ через $\frac{1+\cos 2x}{2}$, тогда получим

$$\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\cos 3x=\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos 2x\cos 3x.$$

Теперь применим формулу (6):

$$\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos 2x\cos 3x=\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{4}(\cos x+\cos 5x).$$

Итак,

$$\cos^2 x \cos 3x = \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 5x.$$

В итоге получилось выражение, содержащее тригонометрические функции в первой степени.

Упражнения

Представьте в виде суммы тригонометрических функций:

266. $\cos 40° \cos 50°$.

267. $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$.

268. $\sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{\pi}{24}$.

269. $\sin 110° \sin 50°$.

270. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

271. $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

272. $\cos(x + \beta)\cos(x - \beta)$.

273. $\sin(x + \alpha)\sin(x - \alpha)$.

274. $4 \sin 30° \sin 20° \sin 10°$.

275. $4 \cos 60° \cos 20° \cos 10°$.

276. $4 \sin 25° \cos 15° \sin 5°$.

277. $8 \cos 1° \cos 2° \cos 4° \cos 8°$.

Представьте в виде, удобном для вычисления без таблиц, и вычислите:

278. $2\sin 22°30' \cos 7°30'$.

279. $\cos 45° \cos 15°$.

280. $\sin 52°30' \sin 7°30'$.

281. $\sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}$.

282. $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4}$.

283*. $8 \cos 10° \cos 50° \cos 70°$.

Понизьте степень тригонометрической функции в выражении:

284. $2 \cos^2 x$.

285. $2 \sin^2 2x$.

286. $2 \cos^2 x \cos 2x$.

287. $\cos^2 x \sin^2 x$.

288. $\sin^2 6x$.

289. $\cos^2 4x$.

Докажите тождество:

290. $2 \sin 4x \sin 2x + \cos 6x = \cos 2x$.

291. $\sin^3 x \cos^2 x = \frac{1}{8}\sin x - \frac{1}{16}\sin 5x + \frac{1}{16}\sin 3x$.

292. $\sin 5x \cos 3x \cos 6x = \frac{1}{4}(\sin 14x + \sin 2x + \sin 8x - \sin 4x)$.

293. Верно ли равенство $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = \frac{3}{16}$?

93. Решение простейших тригонометрических неравенств

Вы уже встречались с решениями тригонометрических неравенств. Многие из них приводятся к решению простейших тригонометрических неравенств вида

$$\sin x < a, \ \sin x > a, \ \sin x \leqslant a$$

и т. п.

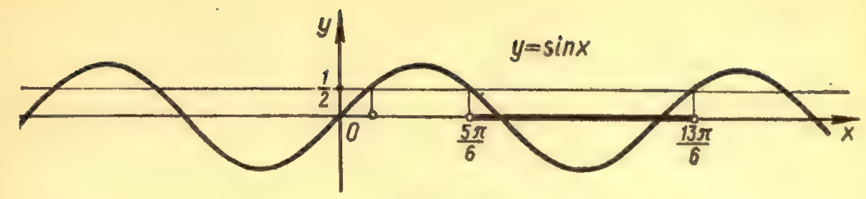


Рис. 42

Рассмотрим примеры решения таких неравенств.

Пример 1. Решим неравенство

$$\sin x < \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Чтобы решить неравенство (1), на рисунке 42 проведена прямая $y = \frac{1}{2}$. Заметим, что эта прямая пересекает синусоиду в бесконечном числе точек. На рисунке выделен один из промежутков соответствующих значений аргумента, служащих решениями данного неравенства. Эти значения x, удовлетворяющие неравенству (1), записаны ниже:

$$\frac{5}{6}\pi < x < \frac{13}{6}\pi. \qquad (2)$$

Теперь, чтобы записать полный ответ, надо воспользоваться периодичностью $\frac{5}{6}\pi + 2\pi k < x < \frac{13}{6}\pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

В качестве первоначального промежутка можно было бы избрать не $\left]\frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right[$, а какой-нибудь другой, например $\left]\frac{17\pi}{6}; \frac{25\pi}{6}\right[$, и общий ответ записать, прибавив соответственно $2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решим неравенство

$$\cos x \leqslant \frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Чтобы решить это неравенство, на рисунке 43 проведена прямая $y = \frac{1}{2}$. Заметим, что эта прямая пересекает график функции $y = \cos x$ в бесконечном числе точек. На рисунке выделен один

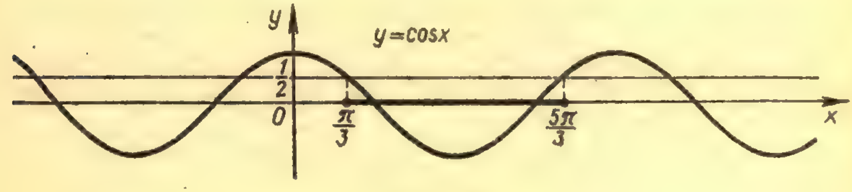


Рис. 43

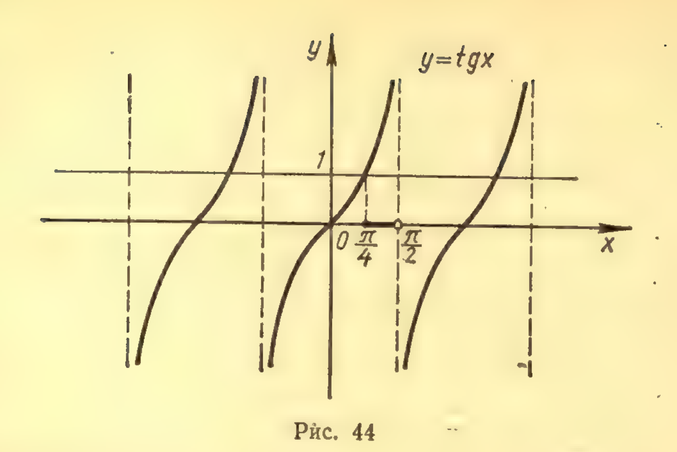


Рис. 44

из промежутков соответствующих значений аргумента, служащих решениями данного неравенства. Эти значения x, удовлетворяющие неравенству (3), записаны ниже:

$$\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}. \qquad (4)$$

На рисунке 43 промежуток, заданный неравенством (4), отмечен жирным отрезком оси абсцисс.

Теперь, чтобы записать полный ответ, надо воспользоваться периодичностью функции косинус:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

В качестве первоначального промежутка можно было бы взять не $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$, а какой-нибудь другой, например $\left[\frac{7\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}\right]$, и общий ответ записать, прибавив $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3. Решим неравенство

$$\operatorname{tg} x \geqslant 1. \qquad (5)$$

Чтобы решить неравенство (5), на рисунке 44 проведена прямая $y = 1$. Заметим, что эта прямая пересекает график тангенса в бесконечном числе точек. На рисунке выделен один из промежутков соответствующих значений аргумента, служащих решениями данного неравенства. Эти значения x, удовлетворяющие неравенству (5), записаны ниже:

$$\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}. \qquad (6)$$

На рисунке 44 промежуток, заданный неравенством (6), отмечен жирным отрезком оси абсцисс.

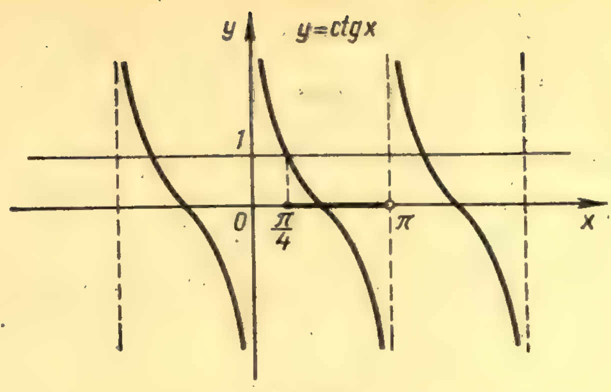


Рис. 45

Теперь, чтобы записать полный ответ, надо воспользоваться периодичностью тангенса:

$$\frac{\pi}{4}+\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 4*. Решим неравенство

$$\operatorname{ctg} x \leqslant 1. \qquad (7)$$

Чтобы решить неравенство (7), на рисунке 45 проведена прямая $y=1$. Заметим, что эта прямая пересекает график функции $y = \operatorname{ctg} x$ в бесконечном числе точек. На рисунке выделен один из промежутков соответствующих значений аргумента, служащих решениями неравенства. Эти значения x, удовлетворяющие неравенству (7), записаны ниже:

$$\frac{\pi}{4} \leqslant x < \pi. \qquad (8)$$

Теперь, чтобы записать полный ответ, надо воспользоваться периодичностью котангенса:

$$\frac{\pi}{4}+\pi k \leqslant x < \pi+\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Упражнения

Решите неравенство:

294. $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

295. $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

296. $\sin x \geqslant 0{,}5055$.

297. $\cos x \geqslant 0{,}7900$.

298. $\sin 2x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

299. $\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos x \leqslant \frac{1}{2}$.

300. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

301. $2\sin x\cdot\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

302. $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$.

303. $\operatorname{tg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

304*. $\operatorname{ctg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

305*. $\operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}$.

306*. $\operatorname{ctg}(\pi - x) < -1$.

307. $\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

308*. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

309*. $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} \geqslant 1$.

94. Примеры решения тригонометрических уравнений

В пунктах 85—88 было показано, как решать простейшие тригонометрические уравнения.

Встречаются и более сложные тригонометрические уравнения. Их решение требует знания формул, выражающих свойства тригонометрических функций. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Решим уравнение

$$6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0. \qquad (1)$$

Введем новую переменную, обозначив $\sin x = y$. Тогда уравнение (1) можно будет записать в виде

$$6y^2 - 5y + 1 = 0.$$

Мы получили квадратное уравнение. Его корнями служат $y = \frac{1}{2}$ или $y = \frac{1}{3}$. Следовательно, $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = \frac{1}{3}$. В первом случае получаем решение:

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, \text{ или } x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Во втором случае имеем:

$$x = (-1)^m \arcsin\frac{1}{3} + \pi m, \text{ или } x \approx (-1)^m \cdot 0{,}34 + \pi m,\ \ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 2. Решим уравнение

$$6\cos^2 x - 5\sin x + 5 = 0.$$

Заменяя $\cos^2 x$ через $1 - \sin^2 x$, приходим к квадратному уравнению относительно $\sin x$. Таким образом, заменой иногда удается привести данное уравнение к уравнению, содержащему одну и ту же функцию, а затем еще одной заменой получить алгебраическое уравнение.

Пример 3. Уравнение

$$\cos 2x + \sin x = 0$$

также сводится к квадратному уравнению, если $\cos 2x$ заменить выражением $1 - 2\sin^2 x$, а потом $\sin x$ обозначить через y (доведите решение до конца).

Пример 4. Решим уравнение

$$\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x = 3.$$

Обозначим $\operatorname{tg} x$ через y, тогда, учитывая, что $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, получаем уравнение

$$y + 2 \cdot \frac{1}{y} = 3.$$

Оно приводится к квадратному уравнению $y^2 - 3y + 2 = 0$ при условии, что $y \neq 0$. Его решения: $y = 2$ и $y = 1$.

I. $\operatorname{tg} x = 2$, $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$,

$$x \approx 1{,}11 + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

II. $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 5. Решим уравнение

$$3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0. \qquad (2)$$

Для этого можно воспользоваться формулами тангенса половинного аргумента и решить потом получившееся биквадратное уравнение. Однако данное уравнение можно решить проще.

Каждое слагаемое левой части — одночлен второй степени относительно переменных y и z, где $y = \sin x$ и $z = \cos x$. Говорят, что это *однородное уравнение второй степени* относительно синуса и косинуса. Синус и косинус не могут быть одновременно равными нулю. Так что значение аргумента, при котором одна из этих функций обращается в нуль, не является решением этого уравнения. Поэтому можно обе части уравнения разделить на $\cos^2 x$ (или на $\sin^2 x$) и при этом получить уравнение, равносильное уравнению (2):

$$3 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = 1 \text{ или } \operatorname{tg} x = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z},$$

или

$$x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Бывают однородные уравнения первой степени, например уравнение $\sin x + 2\cos x = 0$, и третьей степени, например $\sin^3 x + 2\sin^2 x \cos x - 3\sin x \cos^2 x + 2\cos^3 x = 0$. Они также решаются делением левой и правой части уравнения на косинус или синус в степени, равной степени однородности урав-

нения. Так, уравнение первой степени делят на $\cos x$ или на $\sin x$, а третьей степени на $\cos^3 x$ или $\sin^3 x$. Потом, заменой $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$ на y, получают алгебраическое уравнение.

Упражнения

Решите уравнение:

310. $1 + \cos x + \cos 2x = 0$.

311. $3 - \cos^2 x - 3 \sin x = 0$.

312. $4\sin x = 4 - \cos^2 x$.

313. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2\frac{1}{2}$.

314. $\cos \frac{x}{2} = 1 + \cos x$.

315. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$.

316. $5 \cos x + 12 \sin x = 13$.

317. $\sin x - \sin 2x = 0$.

318. $1 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2}$.

319. $1 + \cos x = 2 \cos \frac{x}{2}$.

320. $\cos 2x = 2\frac{1}{3} \sin x$.

321. $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$.

322. $\cos x + \sin x = 0$.

323. $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x = -1$.

324. $3 \cos^2 x = 4 \sin x \cos x - \sin^2 x$.

95. Доказательство тригонометрических тождеств

Доказать тригонометрическое тождество — значит с помощью известных формул, связывающих между собой тригонометрические функции, показать, что левая часть равна правой. При этом в доказательствах поступают иногда наоборот, преобразуют правую часть так, чтобы получилось выражение, стоящее в левой части. Можно преобразовать отдельно обе части так, чтобы они были приведены к одному и тому же выражению.

Встречаются равенства, которые являются тождеством на одном множестве и не являются тождеством на другом множестве. Так, известные тригонометрические формулы являются тождествами на определенных множествах. Например, формула

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \tag{1}$$

является тождеством на всей числовой прямой $\boldsymbol{R}$, т. е. $\alpha \in]-\infty; \infty[$.

Формула для тангенса двойного аргумента

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \tag{2}$$

является тождеством не на всей числовой прямой $\boldsymbol{R}$. Во-первых, надо исключить точки, в которых не определены $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$, т. е. точки вида $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, во-вторых, точки, в которых обращается в нуль знаменатель правой части. Это точки, в которых $\operatorname{tg}^2\alpha = 1$, т. е. $\operatorname{tg} \alpha = 1$ и $\operatorname{tg} \alpha = -1$.

Такими точками будут точки вида $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi m$ и $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi p$, $m, p \in Z$ (отметим, что эти точки уже исключены, так как при таких α не определен $\operatorname{tg} 2\alpha$).

При доказательстве тождества иногда в промежуточных действиях производят сокращения дробей. Тогда из области, на которой задано тождество, надо исключить те значения, при которых обращается в нуль множитель, на который происходит сокращение.

Например, при доказательстве тождества

$$\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = 1, \qquad (3)$$

преобразовывая левую часть, мы делим числитель и знаменатель на $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$. Поэтому тождество (3) имеет место на множестве действительных чисел, исключая точки вида $\alpha = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Упражнения

Докажите тождество:

325. $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$.

326. $\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

327. $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

328. $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

329. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 2 \operatorname{tg} x$.

330. $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

331. $\frac{\sin (x - \pi) \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \operatorname{ctg} (\pi - x)} = -1$.

332. $\cos x \operatorname{tg} (\pi + x) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 1$.

333. $\frac{\cos^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin (\alpha - \pi)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

334. $\frac{\sin^2 (\alpha - 630^\circ)}{1 + \sin (-\alpha)} = 1 + \cos (\alpha - 90^\circ)$.

96*. Сведения из истории

Задачи, которые теперь решаются при помощи тригонометрических функций, возникли давно. Особенно серьезные требования к умению решать такие задачи в древности предъявляла астрономия. Астрономов интересовали соотношения между сторонами и углами сферических треугольников, составленных из лежащих на сфере дуг больших кругов. Они неплохо справлялись с более сложными задачами, чем задачи на «решение» плоских треугольников, которыми вы занимались в восьмом классе.

Вместо наших таблиц тригонометрических функций древние математики составляли таблицы длин хорд, стягивающих дуги заданной длины. Самые ранние такие таблицы, составленные греческими математиками еще в III—II веках до н. э., не дошли до нас. Наиболее древние сохранившиеся таблицы длин хорд были составлены в Александрии астрономом Птолемеем (II в. н. э.). Они содержат длины хорд окружности с шагом 30′. Длины хорд записаны в виде трехзначных шестидесятеричных дробей, т. е. в виде

$$\frac{a}{60}+\frac{b}{60^2}+\frac{c}{60^3},$$

где a, b, c — целые числа от 0 до 59.

Тригонометрические функции sin, cos, tg, ctg, sec, cosec как отношения длин отрезков, проведенных в окружности, встречаются у индийских и арабских математиков V—X веков. Индийский математик Ариабхата (конец V в.) знал формулу $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ и даже формулы для синуса, косинуса и тангенса половинного угла (см. п. 90), которые служили ему для вычисления таблиц этих функций.

В Западной Европе эти достижения были продолжены в XV—XVI веках. Ряд результатов принадлежит здесь французскому математику Ф. Виету (1540—1603). С возникновением дифференциального исчисления были найдены формулы для производных тригонометрических функций. Они по существу были известны уже И. Ньютону. Их геометрический вывод можно найти у Котеса (1682—1716). Достаточно ясные представления о поведении тригонометрических функций при изменении аргумента от $-\infty$ до $+\infty$ встречаются у Д. Валлиса (1616—1703). Но, вообще говоря, математики до Л. Эйлера не проявляли в этом отношении большой последовательности и в связи с отдельными задачами ограничивали область определения тригонометрических функций различным образом. Не было и ясности в том отношении, имеют дело с числовыми функциями числового аргумента или имеется в виду зависимость длин отрезков от величин углов или длин дуг.

Современный вид теория тригонометрических функций приобрела только у Л. Эйлера, в частности в его книге «Введение в анализ бесконечно малых» (1748).

Дополнительные упражнения к главе VI

Найдите производную функции:

335. $y = \sin 5x$.

336. $y = \cos\left(6x + \frac{\pi}{2}\right)$.

337. $y = \cos^2(ax + b)$.

338. $y = 2x \sin x - (x^2 - 2{,}3) \cos (x + 2)$.

339. $y = (x^2 + x + 1) \sin 3x$.

340. $y = \sin x \cos x$.

341. $y = \operatorname{tg} x + (1 + \operatorname{ctg} x) \cos x$.

Вычислите предел:

342*. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\frac{\pi}{2} - x}$.

343*. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{5x}$.

344*. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 7x}$.

345*. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

Определите амплитуду, период и начальную фазу гармонического колебания:

346. а) $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5} - 4x\right)$.

347*. а) $y = -0{,}6 \cos\left(\frac{1}{2}x + 0{,}3\pi\right)$;

б) $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin (x + 1) + \frac{1}{2} \cos (x + 1)$.

Исследуйте функцию при помощи производной и постройте ее график:

348*. $f(x) = 1{,}5 \cos\left(2\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{9}\right)$.

349*. $g(x) = 3 \cos\left(1\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{12}\right)$.

350. Установите, является ли функция $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ решением дифференциального уравнения $y'' = -4y$.

Представьте формулу в виде уравнения гармонического колебания:

351. $y = 2\left(\sin\frac{\pi}{4} \sin 2x + \cos\frac{\pi}{4} \cos 2x\right)$.

352*. $y = 3 \cos\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) + 4 \sin\left(3x + \frac{\pi}{12}\right)$.

353*. $y = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$.

354. $y = 3\sin 2x$.

355. $y = 4 - 8\cos^2 x$.

356*. $y = -2\sin x - 4\sqrt{3}\cos x$.

Упростите выражение:

357. $\cos(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

358. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\pi - \beta) \cdot \operatorname{tg}(-\alpha)}$.

359. $\dfrac{1 - \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{1 - \sin^2(\pi + x)}$.

360. $\dfrac{\cos^2(\pi - \alpha)}{1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$.

Докажите тождество:

361. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(\pi - x) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{tg}(2\pi - x)$.

362. $\sin(90^\circ + y) \cdot \cos(180^\circ - y) \cdot \operatorname{ctg}(270^\circ + y) =$
$= \sin(90^\circ - y) \cdot \sin(270^\circ - y) \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ + y)$.

Вычислите без таблиц:

363. $10\operatorname{ctg} 135^\circ \cdot \sin 210^\circ \cdot \cos 225^\circ$.

364. $2\sin^2 225^\circ - \operatorname{ctg} 330^\circ \cdot \operatorname{tg} 405^\circ$.

365. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\frac{1}{2}$.

366. $\arccos\frac{1}{2} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$.

367. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

368. $\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg} 1$.

369*. $\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg} 1$.

Проверьте равенство:

370. $\arccos 0 + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4}\pi$.

371. $\arccos(-1) + \arccos 1 = \pi$.

372. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

373*. $\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arcctg} 1 = 0$.

Докажите тождество:

374. $\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

375. $\frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+1}=\sin 2\alpha$.

376. $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

377. Верно ли равенство:
$\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\frac{1}{4}$?

378. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если:

а) $\sin\alpha=0{,}8$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha=3\frac{3}{7}$ и $180^\circ<\alpha<270^\circ$.

Докажите тождество:

379. $\frac{\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{\cos\beta}-\operatorname{tg}\beta$.

380. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2\operatorname{ctg}\alpha$.

381. Выразите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и вычислите их, если

$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Решите уравнение:

382. $\sin^4\frac{x}{2}-\cos^4\frac{x}{2}=0{,}25$.

383. $\cos^2 x+4\sin^2 x=2\sin 2x$.

384. $4(1+\cos x)=3\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

385. $\sin x+\sin 3x=0$.

386. $\cos 2x-\cos 6x=0$.

387. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1$.

Представьте в виде суммы:

388*. $\sin(2x+y)\cos(x+2y)$.

389*. $\cos(2\alpha-\beta)\cos(2\alpha+\beta)$.

390*. $\sin(2x-y)\sin(x+2y)$.

391*. $4\cos^2\frac{x}{2}\cdot\sin^2\frac{x}{2}$.

Глава VII ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

§ 19. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ

97. Первообразная

Вспомним пример применения операции дифференцирования в механике. Если в начальный момент времени $t = 0$ скорость тела $v(0) = 0$, то при свободном падении тело в обычной земной обстановке к моменту времени t пройдет путь

$$s(t) = \frac{g}{2}t^2. \tag{1}$$

Дифференцированием находим скорость:

$$s'(t) = v(t) = gt. \tag{2}$$

Второе дифференцирование дает ускорение:

$$v'(t) = a(t) = g. \tag{3}$$

Оказывается, что ускорение постоянно.

В этой задаче формула (1) была найдена Галилеем из опыта. Но более типично для механики другое положение: задан закон, которому подчиняется ускорение (в нашем случае оно постоянно). Требуется найти закон изменения скорости $v(t)$ и найти координату $s(t)$.

Для этого служит операция *интегрирования*, обратная операции дифференцирования. С ней мы познакомимся в этой главе.

Перейдем к определениям.

О п р е д е л е н и е. *Функция F называется первообразной на заданном промежутке для функции f, если для всех x из этого промежутка*

$$F'(x) = f(x). \qquad (4)$$

П р и м е р 1. Функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ есть первообразная для функции $f(x) = x^2$ на промежутке $]-\infty; \infty[$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$ для всех $x \in]-\infty; \infty[$.

Легко заметить, что $\frac{x^3}{3} + 7$ имеет ту же самую производную x^2. Поэтому и функция $\frac{x^3}{3} + 7$ есть первообразная для x^2 на $\boldsymbol{R}$. Ясно, что вместо 7 можно поставить любую постоянную.

Таким образом, мы видим, что задача нахождения первообразной не однозначна, она имеет бесконечно много решений. В следующем пункте вы увидите, как найти все эти решения.

П р и м е р 2. Для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ на промежутке $]0; \infty[$ первообразной будет функция $F(x) = 2\sqrt{x}$, так как $F'(x) = (2\sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$ для всех x из этого промежутка. Так же как и в примере 1, функция $2\sqrt{x} + C$ при любой постоянной C есть первообразная для функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$ на том же промежутке $]0; \infty[$.

Упражнения

Докажите, что функция F есть первообразная для функции f на указанном промежутке, если:

392. а) $F(x) = 3\sqrt[3]{x}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $x \in]0; \infty[$;

б) $F(x) = \sin x + 3$, $f(x) = \cos x$, $x \in]-\infty; \infty[$.

393. а) $F(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 5$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x \in]0; \infty[$;

б) $F(x) = 4 - \cos x$, $f(x) = \sin x$, $x \in]-\infty; \infty[$.

394. а) $F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in]0; \infty[$;

б) $F(x) = \operatorname{tg} x - \sqrt{2}$, $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

395. а) $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in]0; \infty[$;

б) $F(x) = 3 - \operatorname{ctg} x$, $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $x \in]0; \pi[$.

396. а) $F(x) = 14 - \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in]-\infty;\ 0[$;

б) $F(x) = 9 - \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in]0;\ \infty[$.

397*. а) $F(x) = |x|$, $f(x) = 1$, $x \in]0;\ \infty[$;

б) $F(x) = |x|$, $f(x) = -1$, $x \in]-\infty;\ 0[$.

Найдите первообразную для функции f на $\boldsymbol{R}$, если:

398. $f(x) = x^3$.

399. $f(x) = x^4$.

400. $f(x) = x$.

401. $f(x) = 2\frac{1}{2}$.

98. Основное свойство первообразной

Задача интегрирования состоит в том, чтобы для заданной функции найти все ее первообразные. При решении этой задачи основную роль играет следующая лемма.

Лемма (признак постоянства функции). ***Для того чтобы функция была постоянной на интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее производная равнялась нулю на этом интервале.***

Доказательство необходимости следует из того, что производная постоянной равна нулю. Достаточность следует из таких наглядных геометрических соображений: если график функции во всех точках имеет горизонтальную касательную, то он должен совпадать с некоторым отрезком горизонтальной прямой.

Докажем теперь основное свойство первообразных.

Теорема. ***Если функция F есть первообразная для функции f на промежутке I, то при любой постоянной C функция***

$$F(x) + C \tag{1}$$

также является первообразной для функции f на промежутке I. Любая первообразная функции f на промежутке I может быть записана в виде $F(x) + C$.

Для доказательства теоремы надо проверить два факта: 1) какую бы постоянную в формуле (1) ни поставить вместо C, получится первообразная для функции f; 2) какую бы первообразную для функции f ни взять, ее можно получить из формулы (1) при соответствующем подборе постоянной C.

Первое утверждение проверяется простым подсчетом. Так как $F'(x) = f(x)$ для всех x из интервала I, то для всех x из этого интервала $(F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x)$, т. е. $F(x) + C$ есть первообразная для функции $f(x)$.

Для доказательства второго утверждения воспользуемся признаком постоянства функции. Пусть Φ — еще одна первообразная

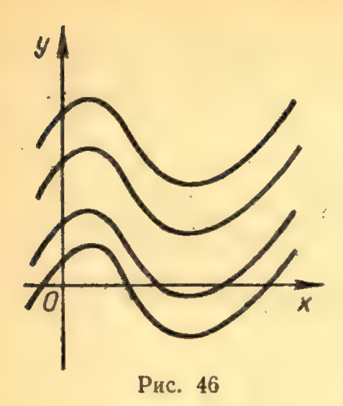


Рис. 46

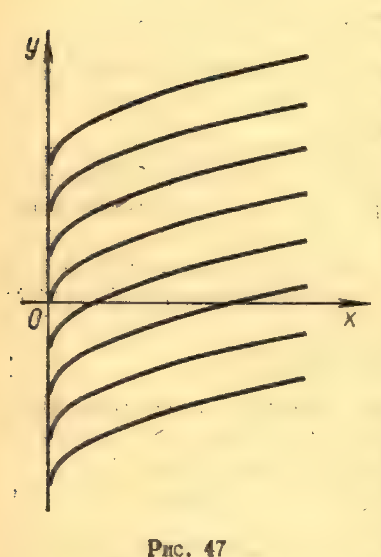


Рис. 47

для функции f на том же интервале I, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$ для всех x из интервала I. Тогда для всех x из интервала I имеем:

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = \\ = f(x) - f(x) = 0.$$

Отсюда следует, в силу признака постоянства функции, что разность $\Phi - F$ есть функция, постоянная на интервале I.

Таким образом,

$\Phi - F = C$, или $\Phi = F + C$,

что и требовалось доказать.

Геометрически основное свойство первообразных может быть выражено так: ***графики всех первообразных функций f получаются из любого из них параллельным переносом вдоль оси Oy*** (рис. 46).

Пример. Найдем для функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$ первообразную, график которой проходит через точку M (9; —2).

Любая первообразная функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$ записывается в виде

$$2\sqrt{x} + C.$$

На рисунке 47 изображены графики этих первообразных. Найдем среди них график, проходящий через точку M (9; —2). Для этого решим уравнение

$$-2 = 2\sqrt{9} + C.$$

Получаем $C = -8$. Следовательно, искомая первообразная имеет вид:

$$2\sqrt{x} - 8.$$

Выражение $-\cos x + C$ называют «общим видом» первообразных для функции sin. Аналогично и для других функций.

Приведем таблицу первообразных для степенной и некоторых тригонометрических функций.

$f(x)$	$x^a\ (a \neq -1)$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
$F(x)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}+C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Проверьте ее самостоятельно по образцу упражнений 392—396. При этом надо иметь в виду, что для степенной функции x^a при целых a это есть следствие теоремы из п. 48, а для остальных показателей a формула будет установлена в п. 115.

Упражнения

Найдите для функции f первообразную, график которой проходит через заданную точку:

402. $f(x) = x^3$, $M(2; 1)$.

403. $f(x) = \sin x$, $M(0; 3)$.

404. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $M\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$.

405. $f(x) = -2$, $M(3; 5)$.

406. $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $M\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$.

407. $f(x) = \cos x$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

408. График одной из первообразных функции $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ проходит через точку (1; 2), а второй — через точку (8; 4). График какой из них расположен выше? Какова разность этих первообразных?

99. Три правила нахождения первообразных

Правила отыскания первообразных похожи на соответствующие правила вычисления производных.

Теорема 1. ***Если F есть первообразная для f, а G — первообразная для g, то $F + G$ есть первообразная для $f + g$.***

Действительно, так как $F' = f$ и $G' = g$, то по правилу вычисления производной суммы имеем:

$$(F + G)' = F' + G' = f + g.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. ***Если F есть первообразная для f, а k — постоянная, то kF есть первообразная для kf.***

Так как $F' = f$, то по правилу вычисления производной

$$(kF)' = kF' = kf.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. ***Если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, а k и b — постоянные, $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для функции $f(kx + b)$.***

Так как $F' = f$, то по правилу вычисления производной от сложной функции имеем:

$$\left(\frac{1}{k} F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k} F'(kx+b) \cdot k = f(kx+b).$$

Теорема 3 доказана.

Приведем примеры на использование этих теорем.

Пример 1. Найдем все первообразные для функции $x^3 + \frac{1}{x^2}$.

Так как для функции x^3 одна из первообразных есть $\frac{x^4}{4}$, а для функции $\frac{1}{x^2}$ одной из первообразных является $-\frac{1}{x}$, то, по теореме 1, для функции $x^3 + \frac{1}{x^2}$ первообразной будет $\frac{x^4}{4} - \frac{1}{x}$.

Общий вид первообразных есть

$$\frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C.$$

Пример 2. Найдем одну из первообразных для функции $5 \cos x$. Так как для функции $\cos x$ одна из первообразных есть $\sin x$, то, по теореме 2, искомая первообразная есть $5 \sin x$.

Пример 3. Найдем одну из первообразных для функции $\sin(3x-2)$.

Так как для функции $\sin x$ одной из первообразных является $-\cos x$, то, по теореме 3, искомая первообразная равна $-\frac{1}{3}\cos(3x-2)$.

Пример 4. Найдем одну из первообразных для функции $\frac{1}{(7-3x)^5}$.

Так как для функции $\frac{1}{x^5}$ первообразной будет $\frac{-1}{4x^4}$, то, по теореме 3, искомая первообразная есть $\frac{1}{-3} \cdot \frac{-1}{4(7-3x)^4} = \frac{1}{12(7-3x)^4}$.

Пример 5. Найдем одну из первообразных для функции $x^2 - 5\sqrt{x} + \frac{2}{\cos^2 3x}$.

Как и в предыдущих примерах, при помощи теорем 1—3 находим, что искомая первообразная есть $\frac{x^3}{3} - \frac{10}{3} x\sqrt{x} + \frac{2}{3} \operatorname{tg} 3x$.

Упражнения

Найдите первообразные для функции:

409. $5x^2 - 1$.

410. $\frac{1}{x^2} - 4\sin x$.

411. $\frac{5}{\sqrt{2x+7}}$.

412. $\frac{3}{\cos^2 5x}$.

413. $\frac{2}{\sin^2 3x}$.

414. $1 - \cos 3x$.

415. $7\sin\frac{x}{3} + \frac{2}{\cos^2 4x}$.

416*. $\frac{4}{\sqrt[3]{(5-2x)^2}} - \cos\frac{x}{2}$.

417*. $2\sin\frac{x}{10} - \frac{5}{(3x-1)^3}$.

418*. $7 - 3x + x^3 - \frac{5}{\sin^2\frac{x}{2}}$.

100. Площадь криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана неотрицательная непрерывная функция f. Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком $[a; b]$ оси Ox и перпендикулярами, проведенными к оси Ox в точках a и b (рис. 48). Эта фигура называется *криволинейной трапецией*. В этом пункте мы будем вычислять площади таких фигур.

Пример 1. Вычислим площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $f(x) = x^2$, отрезком $[1; 2]$ оси Ox и прямыми $x = 1$ и $x = 2$ (рис. 49).

Возьмем $x \in [1; 2]$ и рассмотрим часть этой криволинейной трапеции, расположенную левее точки x (рис. 50).

Площадь этой фигуры, заштрихованной на рисунке 50, обозначим $S(x)$. Тем самым на отрезке $[1; 2]$ определена функция $S(x)$. Вычислим производную этой функции. Чтобы не осложнять вычислений, приведем наглядную схему вычисления для случая $\Delta x > 0$. Тогда

$$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$$

есть площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 51. Очевидно, что

$$\text{пл. } ABCD < \Delta S(x) < \text{пл. } ECDN,$$

или

$$x^2\Delta x < \Delta S(x) < (x + \Delta x)^2 \Delta x, \text{ т. е. } x^2 < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} < (x + \Delta x)^2,$$

$$0 < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} - x^2 < 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Отсюда видно, что при Δx, стремящемся к нулю, дробь $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$ имеет предел, равный x^2. Следовательно,

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = x^2.$$

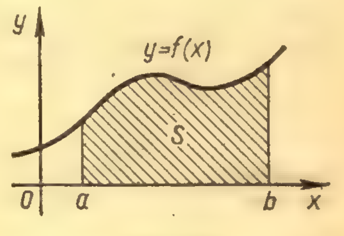
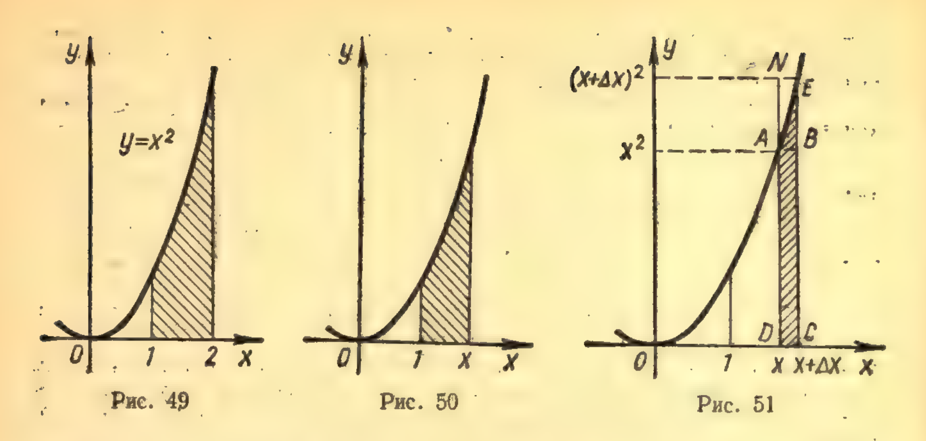


Рис. 48



Таким образом, $S(x)$ есть первообразная для функции x^2 и потому в силу основного свойства первообразных может быть записана в виде $\frac{x^3}{3}+C$. Для определения постоянной C заметим, что $S(1) = 0$, так как при $x = 1$ фигура на рисунке 50 превращается в вертикальный отрезок, площадь которого равна нулю. Поэтому постоянную C надо выбрать так, чтобы $S(1) = \frac{1^3}{3} + C = 0$, откуда получаем, что

$$C = -\frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$S(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

Искомая же площадь есть

$$S(2) = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Рассуждения, приведенные выше, сохраняются и в общем случае.

Теорема 1. ***Пусть f — непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a; b]$ функция и S есть площадь соответствующей криволинейной трапеции (см. рис. 48). Если F есть первообразная для f на интервале, содержащем отрезок $[a; b]$, то***

$$S = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Рассмотрим часть этой криволинейной трапеции, расположенную левее точки x (рис. 52). Площадь этой фигуры есть функция от x — обозначим ее $S(x)$. Докажем, что

$$S'(x) = f(x). \qquad (2)$$

Если $\Delta x > 0$, то $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$ есть площадь заштрихованной на рисунке 53 фигуры. Поскольку функция f непрерывна в точке x, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что $f(x) - \varepsilon < f(x + \Delta x) < f(x) + \varepsilon$ для любых Δx, таких, что $|\Delta x| < \delta$. Следовательно, для всех Δx, таких, что $0 < \Delta x < \delta$ (как это видно из рис. 53),

$$\text{пл. } ABCD < \Delta S(x) < \text{пл. } KMCD$$

или

$$(f(x) - \varepsilon)\Delta x < \Delta S(x) < (f(x) + \varepsilon)\Delta x,$$

т. е.

$$f(x) - \varepsilon < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} < f(x) + \varepsilon. \qquad (3)$$

Аналогично проверяется, что полученное неравенство сохраняется и для всех отрицательных Δx, удовлетворяющих неравенству $-\delta < \Delta x < 0$. Итак, неравенство (3) выполняется для всех Δx, таких, что $0 < |\Delta x| < \delta$, это означает по определению предела, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x).$$

А так как по определению производной

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x},$$

то формула (2) получена.

Итак, мы получили, что функция $S(x)$ есть первообразная для функции f и потому в силу основного свойства первообразных $S(x) = F(x) + C$, где C — постоянная. Для нахождения постоянной C заметим, что $S(a) = 0$, так как при $x = a$ фигура, заштрихованная на рисунке 52, превращается в вертикальный отрезок, площадь которого равна нулю. Поэтому постоянную C надо подбирать так, чтобы выполнялось равенство

$$S(a) = F(a) + C = 0. \text{ Отсюда } C = -F(a).$$

Следовательно,

$$S(x) = F(x) - F(a). \qquad (4)$$

А так как площадь криволинейной трапеции, заштрихованной на рисунке 48, есть $S(b)$, т. е. $S = S(b)$, то из формулы (4) при $x = b$ получаем формулу (1).

Вы видели, что нахождение производной функции в большинстве случаев связано лишь с трудностями вычислительного характера. Нахождение же первообразных связано со значительными трудностями. Более того, не сразу ясно, имеет ли данная функция первообразную или не имеет. В связи с этим отметим, что любая непрерывная на промежутке I функция имеет

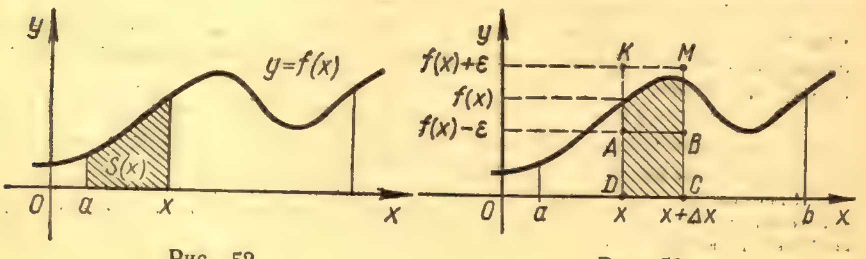


Рис. 52 Рис. 53

первообразную. Однако может оказаться, что первообразную некоторой функции достаточно простого вида нельзя записать в виде композиции изучаемых в школе функций. Так обстоит дело, например, для функции $y = 2^{x^2}$.

Упражнения

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

419. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$.

420. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

421. $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

422. $y = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

423. $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

424. $y = (x + 2)^2$, $y = 0$, $x = 0$.

§ 20.

ИНТЕГРАЛ

101. Формула Ньютона — Лейбница

В предыдущем пункте вы видели, что вычисление площади криволинейной трапеции сводилось к следующему: для заданной функции пишется первообразная и вычисляется приращение первообразной. Далее вы увидите, что к таким вычислениям сводится решение многих задач. Так как у функции первообразных бесконечно много, то естественно возникает вопрос, не зависит ли результат таких вычислений от выбора первообразной? Оказывается, нет. В самом деле. Пусть F и Φ есть первообразные функции f на промежутке I. Тогда в силу основного свойства первообразных существует такая постоянная C, что $\Phi(x) = F(x) + C$ для всех $x \in I$. Следовательно, если числа a и b принадлежат промежутку I, то $\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$, т. е. приращения этих первообразных равны.

Получается, что приращение первообразной зависит только от заданной функции f и чисел a и b.

Поскольку решение многих задач сводится к вычислению приращения первообразной, то для него введено специальное название и обозначение.

О п р е д е л е н и е. *Интегралом от a до b функции f называется приращение первообразной F этой функции:* $F(b) - F(a)$.

Интеграл от a до b функции f обозначается так:

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

читается: «интеграл от a до b эф от икс дэ икс». Числа a и b называются *пределами интегрирования*, a — *нижним*, b — *верхним*. Знак $\int$ называется *знаком интеграла*. Функция f называется *подынтегральной функцией*, а переменная x — *переменной интегрирования*. Отрезок с концами a и b называется *отрезком интегрирования*. Подчеркнем, что верхний предел интегрирования b не обязательно больше нижнего предела интегрирования a, может быть и $a > b$ и $a = b$.

Итак, по определению интеграла*, если $F' = f$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Это равенство называется *формулой Ньютона—Лейбница*.

Пример 1. Вычислим

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx.$$

Поскольку для функции $f(x) = x^2$ первообразной будет функция $\frac{x^3}{3}$, то

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$$

Для удобства записи для приращения первообразной $F(b) - F(a)$ принято сокращенное обозначение $F(x)|_a^b$, т. е.

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b. \tag{2}$$

Пользуясь этим обозначением, формулу Ньютона—Лейбница обычно записывают в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b. \tag{3}$$

Пример 2.

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2.$$

---

* Во многих учебных пособиях интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

с заданными пределами a и b называется «определенным интегралом». Делается это в тех пособиях, в которых первообразная или общее выражение первообразной в виде $F(x) + C$ называется «неопределенным интегралом». Тогда для отличия от «неопределенного интеграла» интегралу в принятом нами смысле приходится давать особое название — «определенный интеграл». Мы этой терминологией пользоваться не будем.

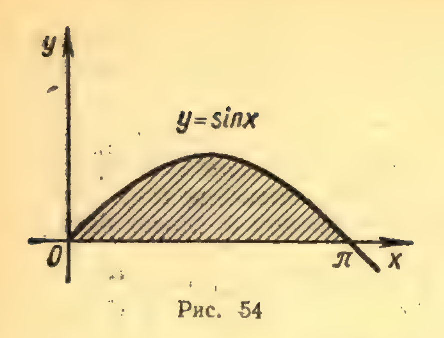


Рис. 54

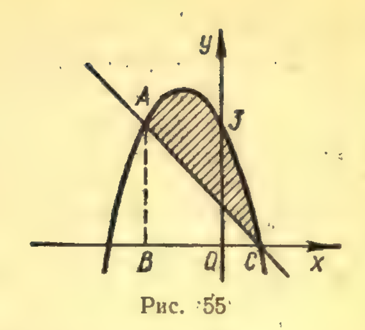


Рис. 55

Формулу (1) из п. 100 для площади криволинейной трапеции (рис. 48) мы теперь будем записывать так:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Таким образом, интеграл от неотрицательной функции есть площадь соответствующей криволинейной трапеции. В этом заключается геометрический смысл интеграла.

Например, вычисления, проведенные в примере 2, показывают, что площадь, заштрихованная на рисунке 54, равна 2.

Пример 3. Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - x$ и $y = 3 - 2x - x^2$.

Нарисуем графики этих функций (рис. 55) и найдем абсциссы точек их пересечения из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = 1 - x, \\ y = 3 - 2x - x^2. \end{cases}$$

Приравнивая правые части, получаем уравнение $1 - x = 3 - 2x - x^2$, откуда $x = 1$ и $x = -2$. Искомая площадь может быть получена как разность площадей криволинейной трапеции $BA3C$ и $\triangle BAC$.

По формуле (4)

$$S_{BA3C} = \int_{-2}^{1} (3 - 2x - x^2)\,dx = \left(3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= 3 - 1 - \frac{1}{3} - 3\cdot(-2) + (-2)^2 + \frac{(-2)^3}{3} = 9;$$

$$S_{BAC} = \frac{1}{2}\,|AB|\cdot|BC| = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = 4\frac{1}{2}.$$

Следовательно, площадь заштрихованной фигуры

$$S = S_{BA3C} - S_{BAC} = 4\frac{1}{2}.$$

Упражнения

Вычислите интеграл:

425. $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

426. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

427. $\int\limits_{-1}^{1} x^4\,dx$.

428. $\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

429. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

430. $\int\limits_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

431. $\int\limits_{2}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^3}$.

432. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^3}$.

433. $\int\limits_{1}^{10} \frac{dx}{x^2}$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (сделав рисунок):

434. $y = x^3$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$.

435*. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$.

436. $y = 2 + x - x^2$, $y = 0$.

437. $y = \cos x$, $y = 0$, $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

438. $y = x^2$, $y = 2x$.

439*. $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$.

102. Интеграл с переменным верхним пределом

Прежде всего, отметим, что интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(z)\,dz = \ldots$$

Это следует из формулы Ньютона—Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

и

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \text{ и т. д.,}$$

т. е. получается одно и то же число.

Рассмотрим теперь интеграл с переменным верхним пределом (его мы обозначим буквой x, а переменную интегрирования обозначим буквой t):

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Это есть функция от x. Покажем, что производная этой функции

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x). \qquad (1)$$

Действительно, по формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a),$$

и потому

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = (F(x) - F(a))' = F'(x) - (F(a))' = f(x).$$

Из формулы Ньютона—Лейбница следует, что

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) - F(a) = 0.$$

Поэтому интеграл от a до x

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

есть та первообразная функции f, которая в точке a обращается в нуль.

Первообразная, которая в точке a принимает значение q, записывается в виде

$$q + \int_a^x f(t)dt. \qquad (2)$$

103*. Нахождение координаты по заданной скорости и скорости по заданному ускорению

Решим теперь задачу, поставленную в начале этой главы. Пусть точка движется по прямой. При этом координата x точки есть функция от времени движения t, т. е. $x = x(t)$. Было установлено, что скорость движения точки $v(t) = x'(t)$. Поэтому если нам известна скорость как функция от времени $v(t)$, то

$$\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x(t) - x(t_0) \qquad (1)$$

в силу формулы Ньютона — Лейбница. Число $x(t_0)$ называют *начальной координатой* и обозначают через x_0. Тогда формулу (1) можно переписать в виде

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(z)\,dz. \qquad (2)$$

Это равенство показывает, как по известной скорости движения точки найти ее координату.

Эту же формулу можно получить из формулы (2) предыдущего пункта: $x(t)$ есть первообразная функции $v(t)$, принимающая в точке t_0 значение x_0.

Ускорение $a(t) = v'(t)$. Поэтому если известно ускорение движения точки как функция от времени, то

$$\int_{t_0}^{t} a(z)\,dz = v(t) - v(t_0) \quad (3)$$

по формуле Ньютона—Лейбница. Число $v(t_0)$ называют *начальной скоростью* и обозначают через v_0. Тогда равенство (3) можно переписать в виде:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)\,dz. \quad (4)$$

Полученная формула показывает, как по известному ускорению движения точки находится скорость этого движения. А зная скорость движения, мы по формуле (2) можем найти координату точки.

Пример. Точка движется с постоянным ускорением a. В начальный момент времени t_0 точка имела начальную скорость v_0 и начальную координату x_0. Найдем координату точки как функцию от времени.

Сначала по формуле (4) находим скорость движения точки:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dz = v_0 + az\Big|_{t_0}^{t} = v_0 + at - at_0 = v_0 + a(t - t_0),$$

а потом по формуле (2) находим координату

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + a(z - t_0))\,dz = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2.$$

***Упражнения* ***

440. Камень брошен вверх. Пренебрегая сопротивлением воздуха и считая ускорение силы тяжести $g \approx 9{,}8$, найдите:
1) наибольшую высоту подъема камня в зависимости от начальной скорости v_0; 2) скорость камня в самом верхнем положении; 3) через сколько времени камень упадет на землю.

441. Найдите путь, пройденный точкой за промежуток времени от $t = 0$ до $t = 5$, если скорость точки меняется по закону $v = 9{,}8t - 0{,}003t^2$. Найдите ускорение этой точки в конце пути (т. е. при $t = 5$).

442. Скорость движущейся точки меняется по закону $v = Rt + a\sqrt{t}$. Найдите путь, пройденный этой точкой за промежуток времени от $t = 0$ до $t = 4$, и ускорение ее в конце пути.

443. а) Точка движется по параболе $y = x^2 - 2x + 3$ так, что ее проекция на ось абсцисс имеет постоянную скорость v. Для проекции этой точки на ось ординат найдите скорость и ускорение (через x).

б) Точка движется по графику функции $y = x^3 - 2x^2$ так, что ее проекция на ось абсцисс имеет постоянную скорость v. Найдите скорость и ускорение проекции этой точки на ось ординат.

104*. Интеграл как предел сумм

Мы определили интеграл как приращение первообразной:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где F — первообразная функции f. Существует другой подход к определению интеграла, о котором сейчас будет рассказано. Определив интеграл этим другим способом, можно потом доказать, что интеграл с переменным верхним пределом имеет своей производной подынтегральную функцию:

$$\left(\int_a^x f(z)\,dz\right)' = f(x). \qquad (1)$$

Именно на этом пути была доказана упомянутая в п. 100 теорема, в силу которой непрерывная на каком-либо промежутке функция имеет на этом промежутке первообразную.

Чтобы понять наглядно новый способ определения интеграла, будем считать $a < b$, а функцию f положительной и непрерывной на $[a; b]$. Тогда речь идет об определении площади криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 48.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n отрезков одинаковой длины

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Концы этих отрезков — точки

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$
$$x_k - x_{k-1} = \Delta x.$$

На каждом из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ как на основании построим прямоугольник высоты $f(x_{k-1})$. Площадь этого прямоугольника равна

$$f(x_{k-1}) \cdot \Delta x,$$

а сумма площадей всех таких прямоугольников (рис. 56) равна

$$S_n(a; b) = f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \ldots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x =$$
$$= \frac{b-a}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right).$$

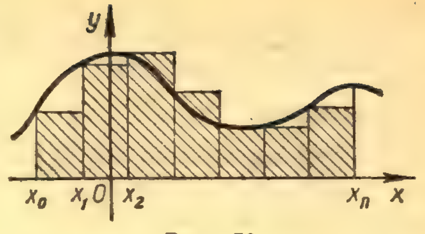


Рис. 56

В силу непрерывности функции f объединение построенных прямоугольников при большом n, т. е. при малом Δx, «почти совпадает» с интересующей нас криволинейной трапецией. Поэтому возникает предположение, что существует предел

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n (a;\ b),$$

который и есть площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;\ b]$, ограниченной сверху графиком функции f. Предположение это правильно.

В действительности предел S существует для любой (не обязательно положительной) непрерывной на $[a;\ b]$ функции f. Этот предел можно считать по определению интегралом f от a до b:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} S_n (a;\ b). \qquad (2)$$

Остается определить интеграл при $a \geqslant b$ формулами

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0,\ \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \text{ при } a > b$$

и доказать исходя из новых определений формулу (1). Из нее уже нетрудно доказать формулу Ньютона—Лейбница. При этом построении теории интеграла формула Ньютона — Лейбница появляется в самом конце, в то время как в принятом в нашем учебнике изложении она по существу выражала просто определение интеграла.

Формулу (3) можно употребить и для приближенного вычисления интеграла в тех случаях, когда явное аналитическое выражение первообразной неизвестно. Лучше, однако, воспользоваться суммами

$$S_n' = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n)\right),$$

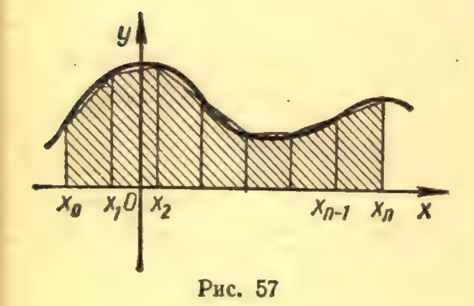


Рис. 57

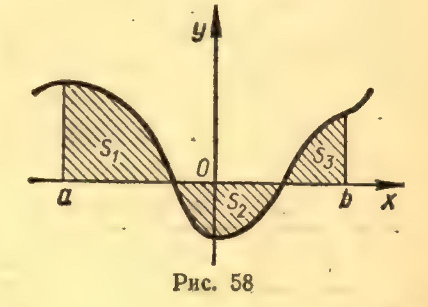


Рис. 58

которые равны в случае положительной функции f площадям «вписанных» в криволинейную трапецию трапеций, ограниченных сверху ломаными, как это изображено на рисунке 57.

Упражнения

444*. Как выражается интеграл от a до b функции f, график которой дан на рисунке 58, через площади S_1, S_2 и S_3?

445*. Вычислите приближенно при помощи сумм вида S_n' для $n = 9$ интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ и сравните его с истинным значением.

105*. Работа переменной силы

Пусть материальная точка под действием силы P движется по прямой. Если действующая сила постоянна, а пройденный путь равен s, то, как известно из физики, работа A этой силы равна произведению силы P на пройденный путь s. Теперь выведем формулу для подсчета работы, совершаемой переменной силой.

Пусть точка движется по оси Ox под действием силы, проекция которой на ось Ox есть функция от x — обозначим ее через $f(x)$. При этом мы будем предполагать, что f есть непрерывная функция. Под действием этой силы материальная точка переместилась из точки $M(a)$ в точку $M(b)$ (рис. 59). Покажем, что в этом случае работа A подсчитывается по формуле

$$A = \int_a^b f(x)dx. \quad (1)$$

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n отрезков одинаковой длины $\Delta x = \frac{b-a}{n}$: $[a; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ..., $[x_{n-1}; b]$ (рис. 60). Работа силы на всем отрезке $[a; b]$ равна сумме работ этой силы на полученных отрезках. Так как f есть непрерывная функция от x, то при достаточно малом отрезке $[a; x_1]$ работа силы на этом отрезке приблизительно равна $f(a)(x_1 - a)$ — мы пренебрегаем тем, что f на отрезке меняется. Аналогично работа силы на втором отрезке $[x_1; x_2]$ приблизительно равна $f(x_1)(x_2 - x_1)$, и так далее; работа силы на n-м отрезке приблизительно равна $f(x_{n-1})(b - x_{n-1})$. Следовательно, работа силы на всем отрезке $[a; b]$ получается приближенно

$$A \approx A_n = f(a)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x = \\ = \frac{b-a}{n}(f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})),$$

Рис. 59

Рис. 60

и точность приближенного равенства тем больше, чем короче отрезки, на которые разбит отрезок $[a; b]$. Естественно, что это приближенное равенство переходит в точное, если перейти к пределу, при n, стремящемся к бесконечности:

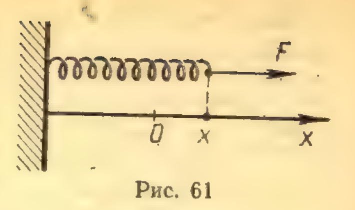


Рис. 61

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n} (f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})) \right).$$

Поскольку предел сумм A_n при $n \to \infty$ равен определенному интегралу рассматриваемой функции от a до b (см. п. 104), то формула (1) выведена.

Пример 1. Сила упругости пружины, растянутой на 5 *см*, равна 3 *н*. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 5 *см*?

По закону Гука сила F, растягивающая пружину на величину x, вычисляется по формуле

$$F = kx,$$

где k — постоянный коэффициент пропорциональности (рис. 61), точка O соответствует свободному положению пружины. Из условий задачи следует, что

$$3 = k \cdot 0{,}05.$$

Следовательно, $k = 60$ и сила $F = 60x$, а работа по формуле (1)

$$A = \int_0^{0,05} 60x\,dx = 30x^2 \Big|_0^{0,05} = 0{,}075 \ (\textit{дж}).$$

Пример 2. На оси Ox в точке O закреплена материальная точка массы m. Она притягивает по закону Ньютона точку массы 1, находящуюся на той же оси Ox. Подсчитаем работу силы притяжения при перемещении единичной точки с единичной массой из положения a в положение b (рис. 62).

Если точка единичной массы находится в точке x, то на нее действует сила притяжения

$$F = -\gamma \frac{m \cdot 1}{x^2},$$

где γ — постоянный коэффициент, а знак минус указывает на то, что сила притяжения направлена к началу координат. Искомая работа подсчитывается по формуле (3) и при $0 < a < b$ оказывается отрицательной:

$$A = \int_a^b -\gamma \frac{m}{x^2}\,dx = \frac{\gamma m}{x}\Bigg|_a^b = \frac{\gamma m}{b} - \frac{\gamma m}{a} = \gamma m \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right).$$

$$\overset{}{0} \quad a \quad x \quad b \quad x$$

Рис. 62

***Упражнения* ***

446. Какую работу надо затратить на сжатие пружины на 4 *см*, если известно, что сила в 2 *н* сжимает эту пружину на 1 *см*?

447. а) Сила в 4 *н* растягивает пружину на 8 *см*. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 8 *см*?
б) Сила в 6 *н* растягивает пружину на 2 *см*. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 6 *см*?

448. Под действием электрического заряда величины q электрон перемещается по прямой с расстояния a до расстояния b. Найдите работу силы взаимодействия зарядов (рис. 63). (Коэффициент пропорциональности в формуле, выражающей закон Кулона, считать равным γ.)

449. Канал имеет в разрезе форму равнобочной трапеции высоты h с основаниями a и b. Найдите силу, с которой вода, заполняющая канал, давит на плотину ($a > b$, a — верхнее основание).

450. Определите силу давления воды на стенки аквариума, заполненного до высоты h. Основание аквариума — прямоугольник со сторонами a и b.

451. Вода, подаваемая с плоскости основания в цилиндрический бак через отверстие в дне, заполняет весь бак. Определите затраченную при этом работу. Высота бака равна h, радиус основания равен r.

452. На прямой лежит материальная точка массы m и однородный материальный стержень массы M и длины l. Они притягиваются по закону Ньютона. Найдите силу этого притяжения, если расстояние от точки до стержня равно r. (Коэффициент пропорциональности в формуле, выражающей закон Ньютона, считать равным γ.)

453. Капля воды с начальной массой M падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя ежесекундно массу m. Какова работа сил тяжести за время от начала падения капли до ее полного испарения?

454. Какую минимальную работу по преодолению силы тяжести надо произвести, чтобы насыпать кучу песка в форме конуса высоты H и радиуса основания R? Плотность песка равна ρ и его поднимают с плоскости основания конуса.

455. Однородный стержень длины $l = 20$ *см* вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец. Угловая скорость вращения $\omega = 10\pi\,сек^{-1}$. Поперечное сечение стержня $S = 4\,см^2$, плотность материала, из которого изготовлен стержень, равна $\rho = 7{,}8\ г/см^3$. Найдите кинетическую энергию стержня.

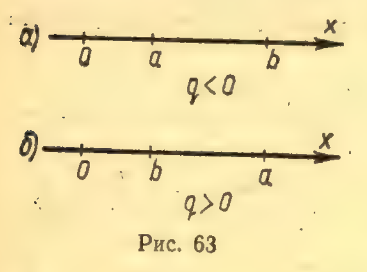


Рис. 63

456. Однородная прямоугольная

пластинка со сторонами $a = 50$ *см* и $b = 40$ *см* вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 3\pi$ *сек*$^{-1}$ вокруг стороны длины a. Найдите кинетическую энергию пластинки, если ее толщина $d = 0{,}3$ *см*, а плотность материала, из которого изготовлена пластинка, равна $\rho = 8$ *г/см*^{3} (толщиной пластинки пренебречь).

457. Однородная треугольная пластинка с основанием $a = 40$ *см* и высотой $h = 30$ *см* вращается вокруг основания с постоянной угловой скоростью $\omega = 5\pi$ *сек*$^{-1}$. Найдите кинетическую энергию пластинки, если ее толщина $d = 0{,}2$ *см*, а плотность материала, из которого изготовлена пластинка, равна $\rho = 2{,}2$ *г/см*^{3} (толщиной пластинки пренебречь).

106*. Три правила вычисления интеграла

Вычисление интегралов проводится по формуле Ньютона—Лейбница, как показано выше. Для более сложных случаев иногда приходится пользоваться дополнительными правилами вычисления интегралов, которые непосредственно следуют из теоремы п. 99. Сформулируем и докажем эти правила.

I. Интегрирование суммы:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

II. Вынесение постоянного множителя за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \quad k \text{ — постоянная.}$$

III. Замена переменной по формуле $t = kx + p$, k и p — постоянные, $k \neq 0$:

$$\int_a^b f(kx+p)\,dx = \frac{1}{k}\int_{ka+p}^{kb+p} f(t)\,dt.$$

Для доказательства этих формул рассмотрим функции F — первообразную для функции f, G — первообразную для g. В силу теоремы 1 из п. 99 сумма $F + G$ есть первообразная для функции $f + g$ и потому

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = (F(x) + G(x))\Big|_a^b = F(b) + G(b) - F(a) -$$

$$- G(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

в силу формулы Ньютона—Лейбница. Правило I доказано.

По теореме 2 из п. 99 произведение kF есть первообразная для функции kf и потому

$$\int_a^b kf(x)\,dx = kF(x)\Big|_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(x)\,dx$$

в силу формулы Ньютона—Лейбница. Правило II доказано.

По теореме 3 из п. 99 функция $\frac{1}{k}F(kx+p)$ есть первообразная для функции $f(kx+p)$ и потому

$$\int_a^b f(kx+p)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+p)\Big|_a^b = \frac{1}{k}F(kb+p) - \frac{1}{k}F(ka+p) =$$

$$= \frac{1}{k}\left(F(t)\Big|_{ka+p}^{kb+p}\right) = \frac{1}{k}\int_{ka+p}^{kb+p} f(t)\,dt$$

в силу формулы Ньютона—Лейбница. Правило III доказано.

Приведем примеры вычисления интегралов с использованием доказанных правил.

1. $$\int_{0,25}^{4}\left(x^2 - \frac{3}{x^4} + \frac{5}{x\sqrt{x}}\right)dx = \int_{0,25}^{4} x^2\,dx - 3\int_{0,25}^{4} x^{-4}dx + 5\int_{0,25}^{4} x^{-\frac{3}{2}}dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{1}{4}}^{4} - 3\frac{x^{-3}}{-3}\Big|_{\frac{1}{4}}^{4} + 5\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Big|_{\frac{1}{4}}^{4} = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3\cdot 4^3} + 4^{-3} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} -$$

$$-10\left(4^{-\frac{1}{2}}\right) + 10\left(\frac{1}{4}^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{2}{3}\cdot 4^3 + \frac{2}{3\cdot 4^3} + 15 = -27\frac{21}{32}.$$

2. В приведенном ниже интеграле сделаем замену переменной по формуле $t = \frac{\pi}{6} + \frac{x}{3}$:

$$\int_{-\pi}^{-2\pi}\frac{dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{3}\right)} = 3\int_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin^2 t} = 3(-\operatorname{ctg} t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{2}} = 0 + 3\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -3\sqrt{3}.$$

При этом новые пределы интегрирования получаются из той же формулы замены переменной: $t = \frac{\pi}{6} + \frac{x}{3}$. Подставив в нее $x = -2\pi$ (верхний предел заданного интеграла), получаем $t = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$, это верхний предел у интеграла после замены. Аналогично находим нижний предел интегрирования, равный $-\frac{\pi}{6}$.

3. В приведенном ниже интеграле сделаем замену переменной по формуле $t = 1 - 2x$, откуда следует, что $x = \frac{1-t}{2}$:

$$\int_0^{-4} \frac{x}{\sqrt{1-2x}}\,dx = \frac{1}{-2}\int_1^9 \frac{\frac{1-t}{2}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{4}\int_1^9 t^{\frac{1}{2}}\,dt - \frac{1}{4}\int_1^9 t^{-\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^9 - \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^9 = \frac{9^{\frac{3}{2}}}{6} - \frac{1}{6} - \frac{9^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{3}.$$

Упражнения

Вычислите интеграл:

458*. $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{3}\,dx.$

459*. $\int\limits_0^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{9}}.$

460*. $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\,dx.$

461*. $\int\limits_0^{\pi} \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)dx.$

462*. $\int\limits_0^{3} (1 + 2x)^9\,dx.$

463*. $\int\limits_3^{-18} \sqrt[3]{2 - \frac{x}{3}}\,dx.$

464*. $\int\limits_{-8}^{8} \frac{dx}{\sqrt{5 + \frac{x}{2}}}.$

465*. $\int\limits_1^{2} \frac{x+1}{(2x-1)^3}\,dx.$

466*. $\int\limits_{-4}^{2} \frac{x}{\sqrt{2 - \frac{x}{2}}}\,dx.$

467*. $\int\limits_0^{28} \frac{5-x}{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{4}}}\,dx.$

468*. $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} (x-2)\sqrt{3x-1}\,dx.$

469*. $\int\limits_2^{0} x\sqrt[3]{1 - \frac{x}{2}}\,dx.$

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

470*. $y = x + 1$ и $y = 5 + 3x - 2x^2$.

471*. $y = x^2$ и $y = x + 2$.

107*. Сведения из истории

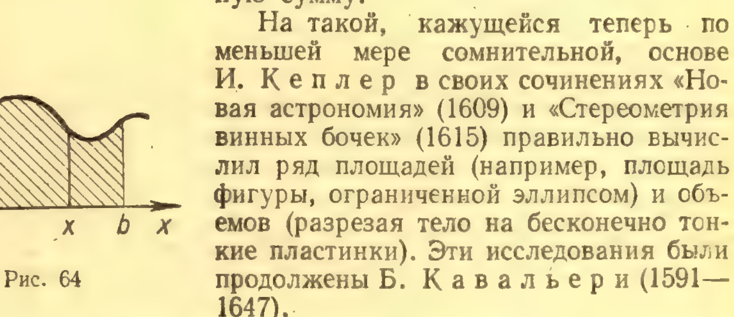
В пункте 104 было показано, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ может быть определен как предел сумм

$$S = \sum f(x_k)\Delta x, \quad \text{где} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Такое определение интеграла не требует предварительного знакомства с понятием производной и с опирающимся на него понятием первообразной. Математики семнадцатого и восемнадцатого веков не пользовались понятием предела. Они говорили вместо этого о «сумме бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых». Например, площадь криволинейной трапеции (рис. 64) они представляли себе составленной из вертикальных отрезков длины $f(x)$, которым тем не менее приписывали площадь, равную бесконечно малой величине $f(x)\,dx$. В соответствии с таким пониманием дела искомая площадь считалась равной сумме

$$S = \sum_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)dx$$

бесконечно большого числа бесконечно малых площадей. Иногда даже подчеркивалось, что отдельные слагаемые в этой сумме нули, но нули особого рода, которые, сложенные в бесконечном числе, дают вполне определенную положительную сумму.



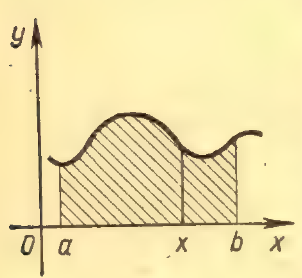


Рис. 64

На такой, кажущейся теперь по меньшей мере сомнительной, основе И. Кеплер в своих сочинениях «Новая астрономия» (1609) и «Стереометрия винных бочек» (1615) правильно вычислил ряд площадей (например, площадь фигуры, ограниченной эллипсом) и объемов (разрезая тело на бесконечно тонкие пластинки). Эти исследования были продолжены Б. Кавальери (1591—1647).

Сохраняет свое значение и в наше время сформулированный Б. Кавальери принцип, который им был введен, с современной точки зрения, неудовлетворительно; он может быть строго доказан. Объясним принцип Кавальери на примере. Пусть требуется найти площадь фигуры, изображенной на рисунке 65, где кривые, ограничивающие фигуру снизу и сверху, имеют уравнения

$$y = f(x) \text{ и } y = f(x) + C.$$

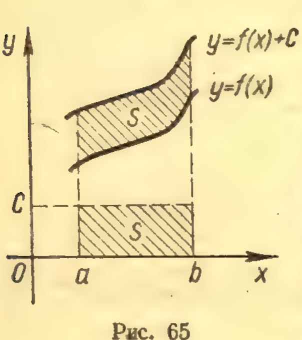


Рис. 65

Представляя себе нашу фигуру состоящей из «неделимых», по терминологии Кавальери, бесконечно тонких столбиков, замечаем, что все они имеют общую длину C. Передвигая их в вертикальном направлении, мы можем составить из них прямоугольник с основанием $b—a$ и высотой C. Поэтому искомая площадь равна площади полученного прямоугольника, т. е. $S = S' = C(b - a)$.

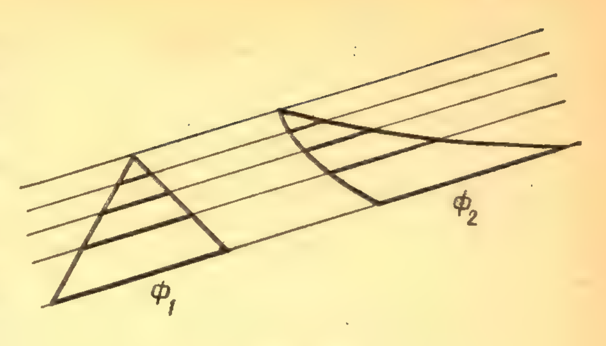


Рис. 66

Общий принцип Кавальери для площадей плоских фигур формулируется так. *Пусть прямые некоторого пучка параллельных пересекают фигуры Φ_1 и Φ_2 по отрезкам равной длины* (рис. 66). *Тогда площади фигур Φ_1 и Φ_2 равны.* Аналогичный принцип действует в стереометрии и оказывается полезным при нахождении объемов.

В абстрактном виде интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

был определен Лейбницем как «сумма всех ординат» графика функции (имеется, конечно, в виду, что ординаты умножены на «бесконечно малое» приращение dx абсциссы). Современное обозначение интеграла по существу восходит к Лейбницу, который суммы обозначал большой буквой S. Название «интеграл» принадлежит ученику Лейбница Я. Бернулли.

Таким образом, интеграл сначала появился независимо от производной. Поэтому было большим открытием установление связи между операциями дифференцирования и интегрирования, которая в общем виде была установлена Лейбницем и Ньютоном: *если*

$$F'(x) = f(x), \tag{1}$$

то

$$F(x) = \int_a^x f(z)dz + C. \tag{2}$$

Обратно, из (2) вытекает (1)*.

* В духе рассуждений математиков XVIII века мы опускаем оговорки, без которых утверждение не совсем точно.

Систематическое исследование интегрирования элементарных функций было завершено Эйлером в его книге «Интегральное исчисление». Вскоре выяснилось, что далеко не все интегралы от элементарных функций выражаются через элементарные функции. Великий русский математик П. Л. Чебышев (1821—1894) полностью исследовал этот вопрос для некоторых классов иррациональных функций (так называемых дифференциальных биномов).

Современное понятие определенного интеграла как предела интегральных сумм принадлежит О. Коши.

Дополнительные упражнения к главе VII

Найдите для приведенных ниже функций f первообразные, графики которых проходят через заданную точку M:

472. $f(x) = x$, $M(-4; 3)$.

473. $f(x) = 5$, $M(2; -4)$.

474. $f(x) = \sqrt{x}$, $M(9; 1)$.

475. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $M(1; -3)$.

476*. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$, $M(-1; 5)$.

477. $f(x) = 2 - 3x$, $M(2; 3)$.

478. График одной из первообразных функции $\sqrt{x}$ проходит через точку (9; 15), а второй — через точку (1; 1). На сколько отличаются эти первообразные и график какой из них расположен выше?

479. График одной из первообразных функции $\frac{1}{(4-x)^2}$ проходит через точку (5; 1), а второй — через точку (8; 2). На сколько отличаются эти первообразные и график какой из них расположен выше?

Найдите первообразные для следующих функций:

480. $7 - 4x$.

481. $3 + 5x$.

482. $kx + b$; k и b — постоянные.

483. $2x - 3x^2$.

484. $4 - x^2$.

485. $x^2 + 4x - 7$.

486. $ax^2 + bx + c$;

a, b и c — постоянные.

487. $\frac{1}{(3+2x)^4}$.

488*. $\frac{5}{\sqrt{7-3x}}$.

489. $5 - \sin 7x$.

490. $4 + 3\cos\frac{x}{7}$.

491. $2\sin\frac{x}{5} + 3\cos 6x$.

492. $3x - \frac{2}{\cos^2 8x}$.

493*. $\frac{4}{(x+3)^2} + \frac{7}{\sin^2 3x}$.

494*. Убедитесь, что рассуждения в примере 1 (из п. 100) при выводе формулы $S'(x) = x^2$ сохраняются и при $\Delta x < 0$.

495*. Убедитесь, что неравенство в доказательстве теоремы 1 сохраняется и при $\Delta x < 0$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

496. а) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$; б*) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 9$.

497*. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

498. $y = \frac{4}{x^2}$, $y = 7 - 3x$.

499. $y = 2 - x - x^2$, $y = 0$.

500. $y = x^2$, $y = 2x - x^2$.

501. $y = x^{2n}$, $y = 1$.

502. $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 4x - x^2$.

503*. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4 - 3x}$, $y = 0$.

504. Криволинейная трапеция ограничена линиями

$$y = ax^2 + bx + c,\ y = 0,\ x = p,\ x = q,\ p < q,$$
$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ на отрезке } [p; q].$$

Докажите, что у этой криволинейной трапеции площадь

$$S = \frac{q - p}{6}(y_1 + 4y_2 + y_3),$$

где y_1, y_2 и y_3 — значения квадратного трехчлена соответственно в точках p, $\frac{p+q}{2}$ и q.

Вычислите интеграл:

505*. $\int_0^{\pi} \sin 5x\, dx$.

506*. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx$.

507*. $\int_0^{2\pi} \sin 3x \cos 5x\, dx$.

508*. $\int_0^{2\pi} \cos 2x \cos 7x\, dx$.

509*. а) $\int_0^{2\pi} \cos^2 nx\, dx$, $n \in N$;

б) $\int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx\, dx$, $k, m \in N$.

Докажите равенство, неравенство:

510*. $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$.

511*. $\left(\int_x^b f(t)\, dt\right)' = -f(x)$ (вычисление производной по нижнему переменному пределу интегрирования).

512*. $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$.

513*. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^p f(x)\,dx + \int\limits_p^b f(x)\,dx$ (и т. д.).

514*. $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx$, если $f(x+T) = f(x)$ для всех x.

515*. $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$, если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a;\ b]$.

516*. $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$, если $f(x) \leqslant g(x)$ на отрезке $[a;\ b]$.

517*. $\int\limits_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0$, если $f(-x) = -f(x)$ для всех x из отрезка $[-a;\ +a]$.

518*. $\int\limits_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx$, если $f(-x) = f(x)$ для всех x из отрезка $[-a;\ a]$.

519*. $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ при $a < b$.

520*. Пусть фигура ограничена линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и $f(x) \leqslant 0$ на отрезке $[a;\ b]$. И в этом случае назовем эту фигуру криволинейной трапецией. Докажите, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -S,$$

где через S обозначена площадь криволинейной трапеции.

521*. Докажите, что отношение площадей подобных криволинейных трапеций равно квадрату коэффициента подобия.

522*. Докажите, что площадь эллипса с полуосями a и b равна πab.

523*. Найдите центр тяжести однородного прямого кругового конуса.

524*. Найдите центр тяжести однородного полушара.

525*. Однородный прямой круговой конус, ось которого вертикальна, погружается в воду (вершиной вниз). Найдите работу, которая при этом производится, против силы выталкивания воды.

526*. Определите работу против сил выталкивания воды при погружении шара в воду.

527*. Найдите центр тяжести однородного полукруга.

528*. Найдите центр тяжести правильной однородной пирамиды.

529*. Найдите центр тяжести однородной дуги окружности с центральным углом 2α.

Глава VIII ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ, ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ И СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИИ

§ 21. ПРОИЗВОДНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

108. Показательная функция

Вы уже знаете из курса восьмого класса, что такое показательная функция с данным положительным основанием степени a. Для этой функции иногда мы будем употреблять новое обозначение; вместо a^x будем писать $\exp_a(x)$: $a^x = \exp_a(x)$.

Здесь $\exp_a$ — обозначение показательной функции с основанием a.

При $a = 1$ показательная функция при любом значении аргумента принимает значение единица, т. е. при любом x

$$\exp_1(x) = 1^x = 1.$$

Этот случай далее не рассматривается.

На рисунке 67 изображены графики показательной функции при некоторых значениях основания a.

Показательная функция $\exp_a$ полностью определяется такими ее свойствами:

1. $\exp_a(1) = a$.
2. $\exp_a(x) > 0$ при любом $x \in R$.
3. При любых действительных x и y

$$\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y).$$

4. При $a > 1$ функция $\exp_a$ возрастает на всей числовой прямой, а при $0 < a < 1$ — убывает (рис. 68).

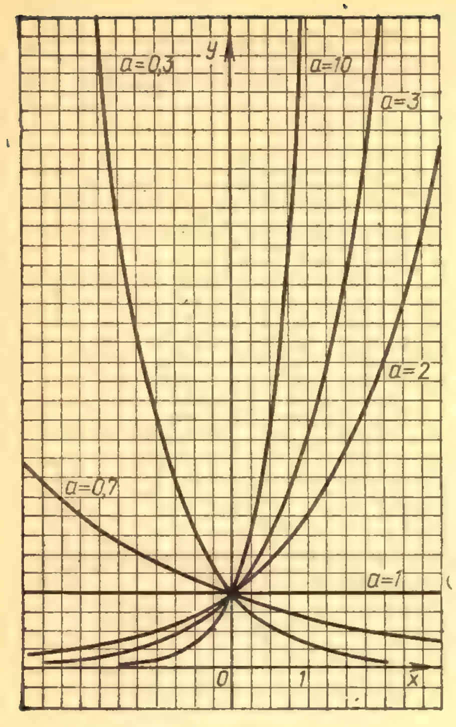


Рис. 67

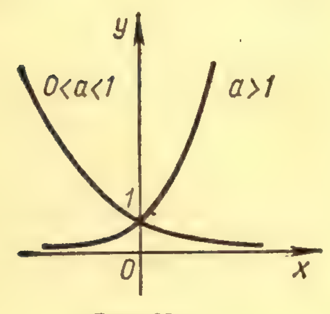


Рис. 68

Эти свойства показательной функции вам знакомы. Первые три из них в прежних обозначениях записываются так:

1. $a^1 = a$. 2. $a^x > 0$.
3. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

Что означает утверждение, что перечисленные свойства полностью определяют показательную функцию $\exp_a$? Точный смысл этого утверждения таков: ***существует одна и только одна определенная на всей числовой прямой функция, обладающая свойствами 1—4.***

Строгое доказательство этого утверждения не входит в программу средней школы. Из курса восьмого класса вы знаете, как находятся значения функции $\exp_a$ для рациональных значений аргумента. То, что функция $\exp_a$ однозначно определена и при иррациональных значениях аргумента, вытекает из свойства 4.

Например, при $a > 1$ для иррационального x в силу свойства 4 должно иметь место неравенство

$$a^{r_1} < a^x < a^{r_2},$$

каковы бы ни были рациональные r_1 и r_2, удовлетворяющие неравенству

$$r_1 < x < r_2.$$

Можно доказать, что существует и притом только одно число y, которое больше всех a^{r_1}, соответствующих рациональным $r_1 < x$, и меньше всех a^{r_2}, соответствующих рациональным $r_2 > x$. Это число y и есть $\exp_a(x)$.

Отметим еще несколько свойств показательной функции.

5. Показательная функция непрерывна в каждой точке числовой прямой.

6. Множеством значений показательной функции (при любом положительном основании, отличном от единицы) является положительная полупрямая $R_+ =]0; \infty[$.

Из свойств 4, 5 и 6 вытекает (п. 84) свойство 7.

7. Функция $\exp_a$ имеет обратную функцию, область определения которой есть положительная полупрямая R_+, а множество значений — вся числовая прямая R. Эта обратная функция называется логарифмической функцией с основанием a и обозначается $\log_a$.

Из определения функции $\log_b$ вытекает, что при положительных $a \neq 1$, $b \neq 1$

$$a = b^{\log_b a}.$$

Логарифмируя это равенство по основанию 10, получим

$$\lg a = \log_b a \cdot \lg b,$$

откуда

$$\log_b a = \frac{\lg a}{\lg b}. \qquad (1)$$

Вспомним еще одно свойство показательной функции.

8. При $b > 0$ и любых x и y

$$(b^x)^y = b^{xy}.$$

Из этого свойства вытекает, что при положительных a и $b \neq 1$

$$a^x = (b^{\log_b a})^x = b^{\log_b a \cdot x}.$$

Полученное тождество

$$a^x = b^{\log_b a \cdot x} \qquad (2)$$

можно записать в виде

$$\exp_a(x) = \exp_b(x \cdot \log_b a). \qquad (2')$$

При $b = 10$ получим

$$a^x = 10^{x \lg a}. \qquad (3)$$

Формулой (3) вы пользовались еще в восьмом классе для вычисления значений показательной функции при любом основании с помощью таблиц значений функции 10^x.

Упражнения

Изобразите схематически график функции:

530. $y = 1^x$. **532.** $y = 0{,}3^x$. **534.** $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$.

531. $y = 2^x$. **533.** $y = 5^x$.

Решите уравнение:

535. $4^x = 64$.

536. $3^x = \frac{1}{81}$.

537. $25^x = \frac{1}{5}$.

538. $8^x = 16$.

539. $\sqrt{3^x} = \sqrt[3]{9}$.

540. $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$.

541. $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^4$.

542. $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$.

543. $7^{(x+1)(x-2)} = 1$.

544. $2^{x^2+x-0,5} = 4\sqrt{2}$.

545. $3^{x^2-x-2} = 81$.

546. $4^{x+1} + 4^x = 320$.

547. $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 150$.

548. $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$.

549. $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$.

550. $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$.

551. $5^x - 5^{3-x} = 20$.

552. $3^{6-x} = 3^{3x-2}$.

553. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-9}$.

554. $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$.

555. $2^x \cdot 5^x = 0,1\,(10^{x-1})^5$.

556. $8^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$.

557. $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.

Решите неравенство:

558. $2^x > \frac{1}{2}$.

559. $\left(\frac{3}{7}\right)^x \leqslant 1$.

560. $(0,3)^x > 0,09$.

561. $(0,2)^x \leqslant \frac{1}{25}$.

562. $\frac{1}{3^x} \geqslant 27$.

563. $(0,5)^x < 4$.

109. Производная показательной функции. Число e

График функции $\exp_{10}$ (см. рис. 69) имеет вид «гладкой» кривой. На глаз представляется, что этот график в каждой точке имеет касательную, угол наклона которой положителен. Поэтому естественно предполагать, что функция $\exp_{10}$ при любом значении аргумента имеет положительную производную. Эта гипотеза верна, что доказывается в более полных курсах анализа. Мы примем без доказательства, что функция $\exp_{10}$ имеет положительную производную в точке 0. Иначе говоря, допустим, что существует предел

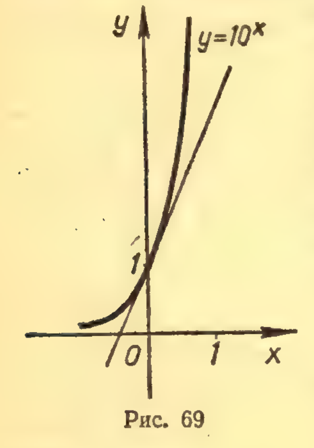


Рис. 69

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^{0+\Delta x} - 10^0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^{\Delta x} - 1}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Все дальнейшее будет отсюда следовать уже сравнительно просто.

Число, обратное пределу (1), принято обозначать через M:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{1}{M}. \qquad (2)$$

Укажем приближенное численное значение константы M:

$$M = 0{,}4343\ldots$$

Покажем теперь, что функция $\exp_{10}$ дифференцируема и во всех остальных точках $x \in \boldsymbol{R}$. По определению производной

$$(10^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^{x+\Delta x} - 10^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 10^x \frac{10^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 10^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{10^x}{M}.$$

Мы получили формулу

$$(10^x)' = \frac{1}{M} \cdot 10^x. \qquad (3)$$

При любом основании $a > 0$, $a \neq 1$,

$$a^x = 10^{\lg a \cdot x}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$(a^x)' = (10^{\lg a \cdot x})' = \frac{1}{M} 10^{\lg a \cdot x} (\lg a \cdot x)' = \frac{\lg a}{M} 10^{\lg a \cdot x} = \frac{\lg a}{M} a^x.$$

Мы видим, что показательная функция обладает замечательным свойством: ее производная отличается от самой функции только постоянным множителем:

$$(a^x)' = \frac{\lg a}{M} \cdot a^x. \qquad (4)$$

Коэффициент $\frac{\lg a}{M}$ в формуле (4) равен единице, если $a = 10^M$. Число 10^M получило специальное обозначение

$$10^M = e.$$

Таким образом, $M = \lg e$. Приближенное значение числа e таково:

$$e = 2{,}718281828459045\ldots.$$

Это число более красиво задается формулой

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \qquad (5)$$

Далее (см. п. 112) будет указан способ доказательства формулы (5).

Показательная функция $\exp_e$ с основанием e обозначается просто exp. Для нее формула производной принимает особенно

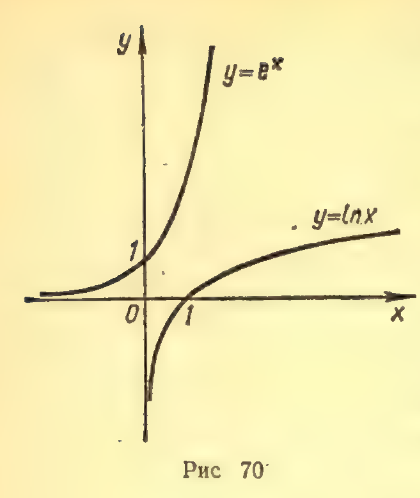


Рис 70

простой вид:

$$(e^x)' = e^x \qquad (6)$$

или (в других обозначениях)

$$\exp'(x) = \exp(x). \qquad (6')$$

Функцию, обратную к e^x, называют *натуральным логарифмом* и обозначают ln (рис. 70). Из формулы (1) п. 108 получаем

$$\frac{\lg a}{M} = \frac{\lg a}{\lg e} = \log_e a = \ln a.$$

Теперь формула для производной показательной функции с основанием a принимает вид

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x \qquad (7)$$

или (в других обозначениях)

$$\exp_a{}'(x) = \ln a \cdot \exp_a(x). \qquad (7')$$

Существуют таблицы функции exp (см. таблицу XX «Четырехзначных математических таблиц» В. М. Брадиса). Однако часто бывает удобнее пользоваться таблицами десятичных логарифмов. Из формулы (2) п. 108 при $a = e$ и $b = 10$ получаем

$$e^x = 10^{\lg e \cdot x}$$

или, так как $\lg e = M$,

$$e^x = 10^{Mx}. \qquad (8)$$

Из формулы (7) следует, что показательная функция a^x имеет первообразную

$$\frac{a^x}{\ln a} + C$$

на промежутке $]-\infty; \infty[$. Действительно,

$$\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{1}{\ln a}(a^x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \ln a = a^x.$$

В частности, первообразная для e^x равна $e^x + C$.

Упражнения

Вычислите приближенно:

564. e^2. **565.** $\frac{1}{e}$. **566.** e^3. **567.** $\sqrt{e}$.

Найдите значение выражения:

568. $\ln e^2$. **569.** $\ln e^{-5}$. **570.** $e^{\ln 3}$.

571. Докажите, что формула (6) есть частный случай формулы (7).

Вычислите производную функции:

572. e^{-x}.

573. e^{3-2x}.

574. e^{-x^2}.

575. $e^{-2x}\sin x$.

576. $e^{\cos 5x}$.

577. 2^{7-5x}.

578. $3^{\operatorname{tg} x}$.

579. $(0,7)^x \cos 3x$.

580. $5^{-x^4} + 9 \cdot (0,1)^{\operatorname{ctg} x}$.

581. $\frac{5^x}{x^3+2}$.

582*. $\frac{\sqrt{x}}{e^x+1}$.

583*. $\frac{e^{\frac{x}{3}}}{\cos 2x+5}$.

584*. $\frac{3^{\frac{x}{2}}}{\sin 5x+7}$.

Найдите первообразную функции:

585. e^{3x}.

586. e^{2-5x}.

587. $e^{\frac{x}{4}}$.

588. $\frac{1}{e^{2x}}$.

589. $3^{\frac{x}{2}} - 5 \cdot (0,7)^{4x}$.

590. $5^{1-3x} + (0,6)^{\frac{x}{5}}$.

591. $2^{\frac{x}{4}} - \sin 3x$.

592. $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x} + 4\cos 7x$.

Для приведенных ниже функций $f(x)$ найдите первообразные, графики которых проходят через указанные точки:

593. $f(x) = e^{-3x}$, $M(0; -2)$.

594. $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$, $M(0; 3)$.

595. $f(x) = 3^x$, $M(0; 0)$.

596. $f(x) = \frac{1}{2^x}$, $M\left(1; \frac{5}{\ln 2}\right)$.

597*. $f(x) = 5^{-3x}$, $M\left(-\frac{1}{3}; -\frac{7}{\ln 5}\right)$.

598*. $f(x) = 7^{\frac{x}{4}}$, $M\left(8; \frac{1}{\ln 7}\right)$.

599. График одной из первообразных функции 2^x проходит через точку $M\left(0; \frac{5}{\ln 2}\right)$, а второй — через точку $M\left(2; \frac{7}{\ln 2}\right)$. График какой из первообразных расположен выше?

600. График одной из первообразных функции 3^x проходит через точку $M\left(1; \frac{8}{\ln 3}\right)$, а второй — через точку $M\left(3; \frac{20}{\ln 3}\right)$. График какой из первообразных расположен выше?

Найдите касательную к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

601. $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$.
602. $f(x) = 3^x$, $x_0 = 1$.
603. $f(x) = e^x$, $x_0 = -1$.
604. $f(x) = (0,7)^x$, $x_0 = -2$.

Постройте график функции:

605*. $f(x) = xe^x$.
606*. $f(x) = \frac{e^x}{x}$.
607*. $g(x) = x^2e^{-x^2}$.
608*. $v(x) = x^2e^{-x}$.
609*. $u(x) = x \cdot 2^{-x}$ (при построении принять $\ln 2 \approx 0,7$).

Исследуйте на возрастание (убывание) и экстремум функцию:

610. $f(x) = \frac{x^3}{2^x}$.
611. $g(x) = 3^{2x-x^2}$.
612. $u(x) = x^4 \cdot (0,7)^x$.
613. $v(x) = xe^{x-x^2}$.

Вычислите интеграл:

614. $\int_0^2 e^x\,dx$.
615*. $\int_{-1}^3 e^{1-2x}\,dx$.
616. $\int_0^2 3^x\,dx$.
617. $\int_{-2}^2 (5^{\frac{x}{4}} - \sin \pi x)\,dx$.
618*. $\int_0^2 (3^{-x} + 2 \cdot x^3)\,dx$.

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

619. $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.
620. $y = 2^x$, $y = 2$, $x = -1$.
621*. $y = 3^x$, $y = (0,7)^x$, $x = 1$.
622*. $y = e^x$, $y = x + 1$, $x = 2$.
623*. $y = e^x$, $y = \cos \frac{\pi x}{2}$, $x = 1$, $x \geqslant 0$.

110. Дифференциальное уравнение показательного роста и показательного убывания

Решение многих задач физики, техники, биологии и социальных наук сводится к математической задаче нахождения функций f, удовлетворяющих дифференциальному уравнению*

---

* *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, выражающее соотношение между значением независимой переменной x и соответствующими ему значениями функции f и ее производных f', f'', ... В п. 80 вы уже имели дело с дифференциальным уравнением

$$f''(x) = -\omega^2 f(x).$$

$$f'(x) = kf(x), \qquad (1)$$

где k — некоторая константа.

Зная свойства производных показательных функций, легко догадаться, что решением уравнения (1) будет любая функция вида

$$f(x) = Ce^{kx}, \qquad (2)$$

где C — постоянная. Так как C произвольно, то решений у дифференциального уравнения (1) бесконечно много.

Докажем, что других решений, кроме функций вида (2), у уравнения (1) нет. Для этого рассмотрим произвольную функцию f, удовлетворяющую уравнению (1), и вспомогательную функцию F:

$$F(x) = f(x)e^{-kx}. \qquad (3)$$

Найдем производную функции F:

$$F'(x) = f'(x)e^{-kx} + f(x)(e^{-kx})' = f'(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx}.$$

Подставляя вместо $f'(x)$ ее значение из уравнения (1), получим

$$F'(x) = kf(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx} = 0.$$

Так как производная функции F равна нулю, функция F есть константа: $F(x) = C$ при всех x. Из (3) получаем

$$f(x)e^{-kx} = C, \; f(x) = Ce^{kx},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. В приведенных выше рассуждениях мы предполагали что функция f определена и удовлетворяет уравнению (1) на всей числовой прямой. В конкретных задачах часто приходится рассматривать функции, удовлетворяющие уравнению (1) только на некотором промежутке. Естественно, что в таком случае формула (2) будет давать общее решение задачи только на промежутке, на котором считается применимым уравнение (1).

Смысл дифференциального уравнения (1) заключается в том, что скорость изменения функции пропорциональна самой функции.

Пример 1. (Радиоактивный распад.) Пусть в начальный момент времени масса радиоактивного вещества равна

$$m(0) = m_0. \qquad (4)$$

Известно, что скорость уменьшения массы вещества $m(t)$ со временем t пропорциональна его количеству, т. е. что выполнено уравнение

$$m'(t) = -km(t),$$

где $k > 0$. По установленному выше

$$m(t) = C \cdot e^{-kt}.$$

Константа C находится из условия (4). Окончательно получаем

$$m(t) = m_0e^{-kt}. \qquad (5)$$

Рассмотренный пример типичен: чтобы выделить из бесконечного числа решений дифференциального уравнения одно решение, обычно требуется еще ввести «начальные условия», в нашем случае условие (4).

Промежуток времени T, через который масса радиоактивного вещества уменьшается в два раза, называют «периодом полураспада» этого вещества. Ясно, что k и T связаны уравнением

$$e^{-kT} = \frac{1}{2},$$

из которого получаем $e^{kT} = 2$, $kT = \ln 2$,

$$k = \frac{\ln 2}{T}.$$

Например, для радия $T \approx 1550$ лет. Поэтому

$$k = \frac{\ln 2}{1550} \approx 0{,}000447.$$

Через миллион лет от начальной массы радия m_0 останется только

$$m\,(10^6) \approx m_0 e^{-447} \approx 0{,}6 \cdot 10^{-194} m_0.$$

Пример 2. Пусть население страны возрастает на 2% в год. С неплохим приближением можно считать, что зависимость численности населения страны $S = S\,(t)$ от времени (исчисляемого в годах) подчинена уравнению

$$S'(t) = 0{,}02S(t)$$

и, следовательно, дается формулой

$$S(t) = S_0 e^{0{,}02t},$$

где $S_0 = S\,(0)$ — численность населения к начальной дате наших расчетов.

Пример 3. Пусть тело, имеющее в начальный момент времени температуру $T\,(0) = T_0$, помещено в среду температуры T_1. Естественно, что при $T_0 < T_1$ тело будет постепенно нагреваться, а при $T_0 > T_1$ — охлаждаться.

Предположим (хотя это и довольно грубое приближение к действительности), что скорость изменения температуры тела $T\,(t)$ пропорциональна разности температур. Это значит, что*

$$T'(t) = -k\,(T - T_1). \qquad (6)$$

---

* Поставив впереди правой части уравнения (6) знак минус, мы считаем коэффициент k положительным в соответствии со сказанным о направлении изменения температуры T при $T > T_1$ и при $T < T_1$.

Чтобы найти решение уравнения (1), положим

$$f(t) = T(t) - T_1.$$

Из (6) для функции f получаем

$$f'(t) = -kf(t).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$f(t) = Ce^{-kt}.$$

Для T отсюда получается

$$T(t) = Ce^{-kt} + T_1. \tag{7}$$

При $t = 0$ имеем

$$T_0 = T(0) = Ce^{-k\cdot 0} + T_1 = C + T_1,$$

откуда

$$C = T_0 - T_1.$$

Окончательно получаем, что решение уравнения (6), удовлетворяющее начальному условию

$$T(0) = T_0, \tag{8}$$

имеет вид

$$T(t) = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}. \tag{9}$$

На рисунке 71 изображены схематически графики функций $T = T(t)$, соответствующие различным начальным значениям T_0. Все они при t, стремящемся к бесконечности, приближаются к стационарному решению

$$T(t) = T_1, \tag{10}$$

которое получается при $T_0 = T_1$, т. е. при условии, что с самого начала тело имеет температуру окружающей среды.

▶ В заключение скажем несколько слов о дифференциальных уравнениях вообще. Вы встречаетесь с дифференциальными уравнениями третий раз. Напомним два предыдущих случая.

1. При вертикальном движении под действием силы тяжести координата точки z удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z''(t) = -g. \tag{11}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{g}{2}t^2, \tag{12}$$

где

$$z_0 = z(0),\ v_0 = z'(0). \tag{13}$$

Задав z_0 и v_0, мы получим уже единственное решение.

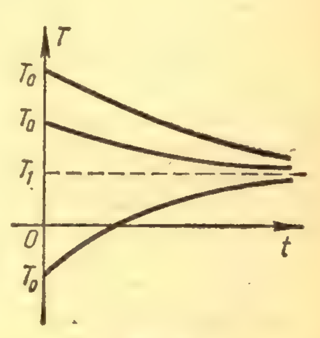


Рис. 71

2. При гармонических колебаниях в соответствии с дифференциальным уравнением

$$y''(t) = -\omega^2 y(t) \qquad (14)$$

общее решение имеет вид

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad (15)$$

где A и φ — произвольные константы. Но эти константы можно определить, если заданы начальные условия

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0.$$

Эти примеры позволяют понять, насколько мощным аппаратом исследования являются дифференциальные уравнения. Очень часто элементарные законы, управляющие каким-либо процессом, записываются в виде дифференциальных уравнений, а для того чтобы выяснить, как процесс развертывается во времени, приходится эти дифференциальные уравнения решать. ◀

Упражнения

624. Докажите, что функция $y = 5e^{3x}$ удовлетворяет уравнению $y' = 3y$.

625. Докажите, что функция $y = 7e^{-2x}$ удовлетворяет уравнению $y' = -2y$.

626. Докажите, что функция $y = 3e^{-7x}$ удовлетворяет уравнению $y' = -7y$.

627*. От m *мг* радия C через t *мин* радиоактивного распада осталось n *мг*. Найдите период полураспада радия C, т. е. через сколько минут останется 0,5 m *мг* радия C?

628*. К началу радиоактивного распада имели 1 *г* радия A. Через сколько минут его останется 0,125 *г*, если его период полураспада равен 3 *мин*?

629*. Период полураспада радиоактивного вещества равен одному часу. Через сколько часов его количество уменьшится в 10 раз?

630*. Вычислите, какая доля радия останется через 1000 лет, если период его полураспада равен 1550 лет.

631*. Докажите, что если функция f имеет производную на $\mathbf{R}$ и для любых двух значений x_1 и x_2 выполняется равенство $f(x_1 + x_2) = f(x_1)\,f(x_2)$, то $f(x) = e^{ax}$ или $f(x) = 0$ для $x \in \mathbf{R}$.

632*. Одно тело имеет температуру в 200°, а другое — в 100°. Через 10 *мин* остывания этих тел на воздухе с температурой в 0° первое тело остыло до температуры в 100°, а второе — до 80°. Через сколько времени температуры тел сравняются?

633*. Два тела имеют одинаковую температуру в 100°. Они вынесены на воздух (его температура 0°). Через 10 *мин* температура одного тела стала 80°, а второго 64°. Через сколько минут после начала остывания разность их температур будет равна 25°?

634*. Моторная лодка движется со скоростью 30 *км/ч*. Какова скорость лодки через 3 *мин* после выключения мотора? (Воспользоваться тем, что скорость лодки $v(t)$ $\left(\text{в } \frac{м}{мин}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $v'(t) = -kv(t)$, где $k = {}^5/_3$.)

§ 22. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ПРОИЗВОДНАЯ

111. Логарифмическая функция

Напомним подробнее, как определяется логарифмическая функция при основании a, где $a > 0$, $a \neq 1$. При $a > 1$ показательная функция возрастает на всей числовой прямой, а при $0 < a < 1$ убывает на всей числовой прямой, при этом в обоих случаях $E(\exp_a) = \boldsymbol{R}_+$. По теореме п. 84 показательная функция $\exp_a$ имеет обратную функцию, с областью определения $\boldsymbol{R}_+$ и множеством значений $\boldsymbol{R}$, непрерывную в каждой точке области определения. Эту обратную функцию называют *логарифмической функцией при основании* a и обозначают $\log_a$. Из той же теоремы следует, что при $a > 1$ функция $\log_a$ возрастает, а при $0 < a < 1$ убывает на множестве $\boldsymbol{R}_+$. На рисунке 72 изображены графики функции $\log_a$ при различных a.

Так как для любых взаимно обратных функций f и g для всякого x из области определения g верно равенство $f(g(x)) = x$ (см. стр. 169), то $\exp_a(\log_a x) = x$ при $x > 0$.

По-другому это равенство можно записать так:

$$a^{\log_a x} = x \text{ при } x > 0. \qquad (1)$$

Равенство (1) называют основным логарифмическим тождеством.

Установим теперь связь между логарифмической функцией при произвольном основании и логарифмической функцией при основании 10. Для этого прологарифмируем при основании 10 равенство (1), пользуясь правилом логарифмирования степени:

$$\log_a x \cdot \lg a = \lg x,$$

откуда получаем искомую связь:

$$\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}. \qquad (2)$$

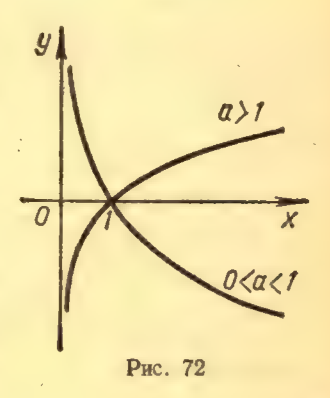


Рис. 72

Из полученной формулы видно, что для нахождения логарифмов при любом

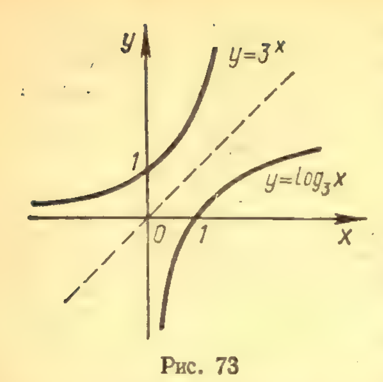


Рис. 73

основании достаточно иметь таблицу десятичных логарифмов.

Пример 1. Найдем $\log_7 3$ при помощи математических таблиц.

В силу формулы (2) имеем:

$$\log_7 3 = \frac{\lg 3}{\lg 7} \approx \frac{0,4771}{0,8451} \approx 0,5645,$$

где $\lg 3 \approx 0,4771$ и $\lg 7 \approx 0,8451$ найдены по таблицам.

Пример 2. Построим график функции $y = \log_3 x$.

Поскольку функции 3^x и $\log_3 x$ взаимно обратны, то график функции $\log_3 x$ симметричен графику функции 3^x относительно прямой $y = x$ (рис. 73).

Докажем, что для любых положительных чисел u и v

$$\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v. \tag{3}$$

Пользуясь формулой (2) и свойствами десятичных логарифмов, имеем:

$$\log_a (uv) = \frac{\lg (uv)}{\lg a} = \frac{\lg u + \lg v}{\lg a} = \frac{\lg u}{\lg a} + \frac{\lg v}{\lg a} = \log_a u + \log_a v.$$

Для положительных u, v и $a \neq 1$ имеют место еще и следующие равенства:

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v, \tag{4}$$

$$\log_a \frac{1}{v} = -\log_a v, \tag{5}$$

$$\log_a u^v = v \log_a u, \tag{6}$$

$$\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}, \tag{7}$$

$$\log_a a = 1. \tag{8}$$

Докажите эти равенства самостоятельно.

Формула (7) играет важную роль. С ее помощью можно переходить от логарифмов при одном основании к логарифмам при другом основании. В частности, при $a = e$, $b = 10$ получаем:

$$\ln u = \frac{\lg u}{\lg e}.$$

С числом $M = \lg e \approx 0,4343$ вы уже встречались. Оно позволяет по десятичным логарифмам находить натуральные и обратно:

$$\lg u = M \cdot \ln u, \qquad \ln u = \frac{\lg u}{M}.$$

Число M называют модулем перехода от натуральных логарифмов к десятичным.

Упражнения

Вычислите логарифм, пользуясь таблицами В. М. Брадиса:

635. $\log_3 5$. **636.** $\log_7 2$. **637.** $\ln 3$. **638.** $\log_{23} 17$.

Постройте график функции:

639. $f(x) = \log_2 x$. **641.** $u(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$.

640. $g(x) = \log_{0,7} x$. **642.** $v(x) = \ln x$.

Решите уравнение:

643. $3^x = 7$. **645.** $5^{3-2x} = 4$. **647.** $(0,3)^{1-\frac{x}{2}} = 5^{3x}$.

644. $2^{1-x} = 5$. **646.** $2^{5-3x} = 7^4$. **648.** $2^x \cdot 3^{1-x} = 7$.

649. При каком основании $\log_a x$ есть возрастающая функция?

650. При каком основании $\log_a x$ есть убывающая функция?

Решите неравенство:

651. $\log_3 x < 2$. **653.** $\log_{0,6} x \leqslant 1$. **655.** $\log_x 17 > \log_x 11$.

652. $\log_{\frac{1}{7}} x \geqslant 5$. **654.** $\log_x 2 > \log_x 5$. **656.** $\log_x \frac{1}{2} < \log_x 7$.

Найдите область определения функции:

657. $f(x) = \log_3 (x - 5)$. **660.** $v(x) = \log_{0,3} (9 - x^2)$.

658. $g(x) = \ln (-x)$. **661.** $p(x) = \log_\pi (6 + x - x^2)$.

659. $u(x) = \lg (7 - x)$. **662.** $w(x) = \lg (x^2 - 3x - 10)$.

112. Производная обратной функции

Пусть функция f на некотором промежутке I непрерывна и возрастает или убывает.

Мы знаем (п. 84), что тогда функция f отображает промежуток I на некоторый промежуток J и имеет обратную функцию g, которая отображает J на I.

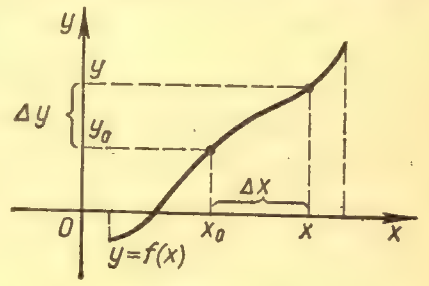


Рис. 74

Пусть в двух точках x_0 и x промежутка I функция f принимает значения (рис. 74)

$$f(x_0) = y_0, \; f(x) = y.$$

Обозначим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. Будем считать x_0, а следовательно, и $y_0 = f(x_0)$ — постоянными, а приращение Δx независимой переменной. Вместе с Δx будут меняться $x = x_0 + \Delta x$, $y = f(x)$ и $\Delta y = y - y_0$. По определению производной, производная функции f в точке x_0 равна

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1}$$

Но можно считать независимой переменной и y. Вместе с Δy меняются $y = y_0 + \Delta y$, $x = g(y)$ и $\Delta x = x - x_0$. По определению производной

$$g'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}. \tag{2}$$

Сравнивая формулы (1) и (2), приходим к мысли, что, ***если производная $f'(x_0)$ существует и не равна нулю, должна быть справедлива формула***

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \textit{ т. е. } g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}. \tag{3}$$

Это предположение верно и может быть доказано при помощи такой выкладки:

$$g'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Здесь нуждается в дополнительном обосновании законность перехода от предела при $\Delta y \to 0$ к пределу при $\Delta x \to 0$.

Чтобы быть совсем точными, мы должны доказать, что из существования предела

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = C \tag{4}$$

вытекает существование и равенство пределу (4) предела

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Это утверждение кажется почти очевидным: в силу непрерывности функции g при Δy, стремящемся к нулю, Δx тоже стремится к нулю, а тогда в силу (4) отношение $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ стремится к C. Проведем строгое доказательство.

Нам надо показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, для которого из $|\Delta y| < \eta$, $\Delta y \neq 0$, вытекает:

$$\left| \frac{\Delta x}{\Delta y} - C \right| < \varepsilon. \tag{5}$$

Чтобы подобрать к данному $\varepsilon > 0$ такое η, заметим, что из (4) вытекает существование такого $h > 0$, что из $|\Delta x| < h$, $\Delta x \neq 0$, следует (5). В силу непрерывности функции g для этого h можно найти такое $\eta > 0$, что из $|\Delta y| < \eta$ вытекает $|\Delta x| < h$, а следовательно, при $\Delta y \neq 0$, и неравенство (5), что и требовалось.

113. Производная логарифмической функции. Свойства логарифмической функции

Выведем теперь формулу для производной логарифмической функции: для всех положительных x

$$\log_a' x = \frac{1}{x \ln a}. \tag{1}$$

Для доказательства этой формулы воспользуемся теоремой 2 предыдущего пункта. Пусть $f(x) = a^x$. Тогда обратная к ней функция $g(x) = \log_a x$ и $f'(x) = a^x \ln a$. По формуле для производной обратной функции (см. п. 112)

$$\log_a' x = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

в силу основного логарифмического тождества (см. п. 111, формулу (1)). Формула (1) доказана.

Обычно отмечают частный случай формулы (1) — производную натурального логарифма:

$$\ln' x = \frac{1}{x}. \tag{2}$$

Она следует из формулы (1) при $a = e$, так как $\ln e = 1$.

Пример 1. Вычислим производную функции $f(x) = \log_3 (5 - 7x)$.

По правилу вычисления производной сложной функции и формуле (1) имеем:

$$f'(x) = (\log_3 (5 - 7x))' = \frac{1}{5 - 7x} \cdot \frac{(5 - 7x)'}{\ln 3} = \frac{-7}{(5 - 7x) \ln 3}.$$

Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ определена на двух промежутках $R_+ =]0; \infty[$ и $]-\infty; 0[$. Из формулы (2) вытекает, что на R_+ она имеет первообразную $\ln x$.

Покажем, что на $]-\infty; 0[$ одной из первообразных функции f является функция $\ln(-x)$. В самом деле,

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \left(-\frac{1}{x}\right)(-1) = \frac{1}{x}.$$

Пример 2. Найдем первообразную для функции $\frac{1}{2+3x}$. Эта функция определена на промежутках $\left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[$ и $\left]-\frac{2}{3}; \infty\right[$. На промежутке $\left]-\frac{2}{3}; \infty\right[$, $2+3x>0$, и по правилу вычисления первообразных искомая первообразная есть функция $\frac{\ln(2+3x)}{3}+$ $+C$. А на промежутке $\left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[$ первообразной для функции $y=\frac{1}{2+3x}$ будет функция $\frac{\ln(-2-3x)}{3}+C_1$. В самом деле,

$$\left(\frac{\ln(-2-3x)}{3}+C_1\right)'=\frac{1}{-2-3x}\cdot(-3)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2+3x}.$$

Пример 3. Построим график функции $f(x)=\sqrt{x}\ln x$.

Область определения этой функции есть промежуток $]0; \infty[$. В этом промежутке функция f непрерывна и обращается в нуль при $x=1$. Исследуем функцию f на монотонность и экстремум. Для этого вычислим производную

$$f'(x)=(\sqrt{x}\ln x)'=(\sqrt{x})'\ln x+\sqrt{x}(\ln x)'=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}.$$

Она обращается в нуль при $\ln x=-2$, т. е. при $x=e^{-2}$. На промежутке $]e^{-2}; \infty[$ производная $f'>0$, следовательно, на этом промежутке функция f возрастает. На промежутке $]0; e^{-2}[$ производная $f'<0$, следовательно, на этом промежутке функция f убывает. В точке e^{-2} производная f' меняет знак с минуса на плюс, следовательно, в точке e^{-2} функция f имеет минимум, $f_{\min}=$ $=f(e^{-2})=\frac{-2}{e}$. График функции f приведен на рисунке 75.

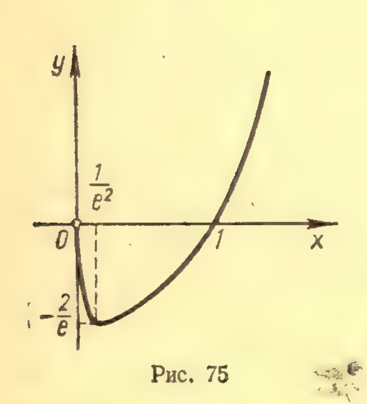


Рис. 75

Докажем теперь формулу (5) п. 109:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Будем исходить из равенства

$$\ln' x=\frac{1}{x}.$$

При $x=1$ получим:

$$\ln'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1.$$

Положим

$$h_n=\frac{1}{n},$$

$$y_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \qquad z_n = e^{y_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

и вычислим пределы этих последовательностей, используя непрерывность функций ln и exp:

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+h_n)}{h_n} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \exp(y_n) = \exp(\lim_{n\to\infty} y_n) = \exp(1) = e.$$

Перечислим теперь основные свойства логарифмической функции.

1. Областью определения логарифмической функции является промежуток $]0; \infty[$: $D(\log_a) = \boldsymbol{R}_+$.

2. Множество значений логарифмической функции — вся числовая прямая $]-\infty; \infty[$: $E(\log_a) = \boldsymbol{R}$.

3. Логарифмическая функция непрерывна и дифференцируема.

4. Логарифмическая функция возрастает при основании $a > 1$ в области своего определения $\boldsymbol{R}_+$. При $0 < a < 1$ логарифмическая функция с основанием a убывает в области своего определения (см. рис. 72).

5. При любом основании $a > 0$ и $a \neq 1$ имеют место равенства:

$$\log_a 1 = 0, \ \log_a a = 1.$$

Упражнения

Вычислите производную функции:

663. $f(x) = \log_3 x$.

664. $g(x) = \log_{0,7} x$.

665. $h(x) = \log_5 (7x)$.

666. $p(x) = \lg(3 - 5x)$.

667. $v(x) = (x^3 + 5)\log_7(2x + 1)$.

668*. $u(x) = \dfrac{\ln(2 - x)}{\sqrt[3]{x} + 5}$.

669*. $\omega(x) = \ln \cos x$.

Постройте график функции:

670*. $f(x) = x \ln x$.

671*. $g(x) = \dfrac{6 \ln x}{x}$.

672*. $u(x) = x - \ln x$.

673*. $v(x) = \dfrac{x}{\ln x - 1}$.

Вычислите интеграл:

674. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x}$.

675. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{3 - 2x}$.

676. $\displaystyle\int_{-4}^0 \frac{dx}{0,5x + 3}$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

677. $y = \dfrac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$

678. $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

679*. $y = \frac{6}{x}$, $y + x = 7$.

680*. $y = \frac{5}{x}$, $y + x = 6$.

Решите неравенство:

681. $\log_9 (2 + x) > 0{,}5$.

682. $\log_5 (3 - x) < -1$.

683. $\log_{0,7} (1 + 2x) > 2$.

684. $\log_{0,3} (2 - 5x) > 2$.

Решите уравнение:

685. $\log_3 x = -1$.

686. $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$.

687. $\log_{0,3} x = 2$.

688. $\log_5 x = \log_5 3$.

689. $\log_5 x = -\log_5 7$.

690. $\log_2 x = 3 - \log_2 7$.

691. $\log_3 (\log_5 x) = 0$.

692*. $\log_x 3 - \log_x 5 = 2$.

693*. $\log_{x-2} (x^2 - 6x + 10) = 1$.

694. $2 \log_7 \sqrt{x} = \log_7 (9 - 2x)$.

695. $\ln (0{,}5 + x) = \ln 0{,}5 - \ln x$.

696. $\lg (4{,}5 - x) = \lg 4{,}5 - \lg x$.

697. $\frac{1}{2} \lg (2x - 1) = 1 - \lg \sqrt{x - 9}$.

698. $\log_3 \sqrt{x - 5} + \log_3 \sqrt{2x - 3} = 1$.

699. $\log_3^2 x = 4 - 3 \log_3 x$.

700. $\frac{1}{5 + \lg x} + \frac{2}{1 - \lg x} = 1$.

701*. $x^{\log_2 x} = 16$.

702*. $x^{\log_3 x - 2} = 27$.

703*. $\log_4 x + \log_{x^2} 2 = 1$.

704*. $\log_5 x \cdot \log_7 x = \log_5 7$.

705*. $\log_5 x + \log_7 x = \log_5 35$.

706*. $\lg x + \log_x 10 = 2{,}5$.

Напишите уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

707. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$.

708. $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$.

709. $f(x) = \lg x$, $x_0 = 1$, $x_0 = 10$.

710*. Докажите, что

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

114*. Натуральный логарифм как интеграл с переменным верхним пределом

Напомним, что показательная и логарифмическая функции в нашем курсе были введены следующим образом. По известному правилу, для любого $a > 0$, $a \neq 1$, определялась показательная функция a^x на множестве рациональных чисел. Затем без доказательства принималось, что эту функцию можно единственным образом «продолжить» так, что полученная функция будет определена и

непрерывна на множестве действительных чисел. Наконец, логарифмическая функция $\log_a$ при основании a вводилась как функция, обратная функции a^x.

Восполнить указанные пробелы можно, однако при этом придется преодолеть значительные технические и принципиальные трудности. То же относится и к допущению, принятому в п. 109 при выводе формулы производной показательной функции.

Существует другой способ введения показательной и логарифмической функции, в значительной мере лишенный указанных недостатков. Этот способ основан на формуле

$$\ln' x = \frac{1}{x}.$$

Из этой формулы следует, что функция ln — одна из первообразных функции $\frac{1}{x}$ на промежутке $]0; \infty[$, точнее, та первообразная, которая при $x = 1$ принимает значение 0. Следовательно (см. п. 102),

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt. \qquad (1)$$

Равенство (1) можно принять за определение функции ln. Выведем основные свойства функции ln исходя из определения (1).

1. Функция ln дифференцируема в каждой точке промежутка $]0; \infty[$. В самом деле, по формуле (1) п. 102

$$\ln' x = \left(\int_1^x \frac{1}{t}\, dt\right)' = \frac{1}{x}.$$

Функция, дифференцируемая в какой-либо точке, непрерывна в этой точке (п. 45, IX класс). Следовательно, функция ln непрерывна в каждой точке промежутка $]0; \infty[$.

2. Функция ln возрастает на промежутке $]0; \infty[$. Действительно, $\ln' x = \frac{1}{x} > 0$ на промежутке $]0; \infty[$.

3. $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{x} dx = 0.$

4. (Теорема сложения.) Для любых $a > 0$ и $b > 0$

$$\ln (ab) = \ln a + \ln b.$$

Для доказательства рассмотрим функцию

$$g(x) = \ln (ax).$$

Ее производная g' вычисляется по формуле производной сложной функции:

$$g'(x) = \frac{1}{ax} \cdot (ax)' = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}.$$

Таким образом, функция $\ln(ax)$ есть одна из первообразных функции $\frac{1}{x}$ и, следовательно, ее можно записать в виде

$$\ln(ax) = \ln x + C.$$

Подставляя в это равенство $x = 1$, имеем $\ln a = \ln 1 + C$, откуда $C = \ln a$. Итак,

$$\ln(ax) = \ln a + \ln x.$$

Полагая $x = b$, получаем

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Методом математической индукции легко показать, что для любых положительных $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n.$$

5. Для любых положительных a и b $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

Действительно, $\ln a = \ln\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) = \ln\frac{a}{b} + \ln b$.

Следовательно, $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

6. Для $x > 0$ и $r \in Q$

$$\ln x^r = r \ln x.$$

Доказательство проведем в несколько этапов.

а) Для $r = 0$ и $r = 1$:

$$\ln x^0 = \ln 1 = 0 = 0 \cdot \ln x,$$
$$\ln x^1 = \ln x = 1 \cdot \ln x.$$

б) Для натурального $r > 1$:

$$\ln x^r = \underbrace{\ln(x \ldots x)}_{r \text{ множителей}} = \underbrace{\ln x + \ln x + \ldots + \ln x}_{r \text{ слагаемых}} = r \ln x.$$

в) Для целого отрицательного r, т. е. $r = -n$, где n — натуральное число, применяя свойство 5, получим:

$$\ln x^r = \ln\frac{1}{x^n} = \ln 1 - \ln x^n = 0 - n \ln x = r \ln x.$$

г) Для $r = \frac{m}{n}$ (m — целое, n — натуральное) в силу б) и в) получим:

$$n \ln x^r = n \ln x^{\frac{m}{n}} = \ln (x^{\frac{m}{n}})^n = \ln x^m = m \ln x.$$

Следовательно, $\ln x^r = \frac{m}{n} \ln x = r \ln x.$

7. $E(\ln) = \boldsymbol{R}$.

Функция ln непрерывна. По первой части теоремы п. 84 множество ее значений — некоторый промежуток. Поэтому достаточно показать, что этот промежуток не «ограничен» сверху и снизу, что для любого положительного числа M найдутся такие x_1 и x_2, что $\ln x_1 > M$, $\ln x_2 < -M$.

Учитывая, что $\ln 2^n = n \ln 2$ и $\ln 2^{-n} = -n \ln 2$, $n \in \boldsymbol{N}$, достаточно взять $x_1 = 2^n$ и $x_2 = 2^{-n}$, выбрав натуральное число n таким, чтобы выполнялось неравенство $n > \frac{M}{\ln 2}$. Тогда

$$\ln x_1 = \ln 2^n = n \ln 2 > M \text{ и } \ln x_2 = \ln 2^{-n} = -n \ln 2 < -M.$$

Следствие. Существует число $e \in \boldsymbol{R}_+$, такое, что $\ln e = 1$. Мы получим новое определение уже знакомого вам числа $e = 2{,}718\ldots$.

Далее определяется функция exp как функция, обратная функции ln, и доказывается, что функция exp обладает свойствами 1—3 показательной функции. Из этих свойств можно вывести, что

$$\exp(r) = e^r$$

при рациональных r.

Для произвольного основания $a > 0$, $a \neq 1$ показательная функция $\exp_a$ определяется равенством

$$\exp_a(x) = \exp_a(x \cdot \ln a),$$

а логарифмическая функция при основании a — как функция, обратная функции $\exp_a$. Попробуйте выполнить намеченный здесь план исследования функции.

§ 23.

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

115. Степенная функция и ее производная

Вы уже знаете, что для любого действительного числа p и каждого положительного числа x определено число x^p. Этим на промежутке $]0; \infty[$ определена функция $f(x) = x^p$. Эта функция называется степенной с показателем степени p. Если число $p > 0$, то степенная функция определена и при $x = 0$, поскольку $0^p = 0$.

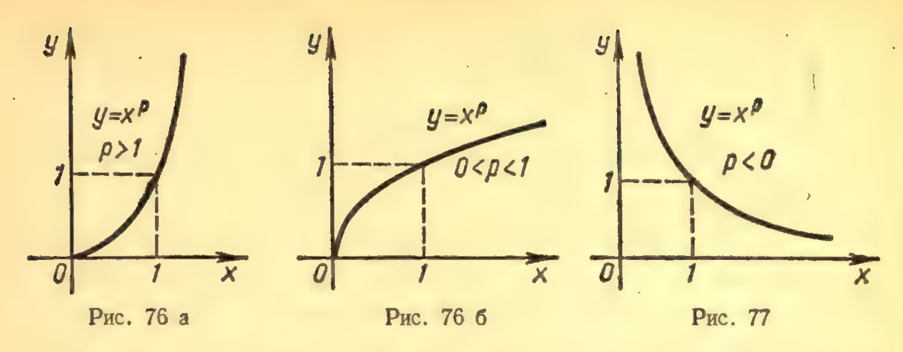


Рис. 76 а Рис. 76 б Рис. 77

В предыдущих разделах курса вы познакомились со степенной функцией и ее производными лишь при некоторых показателях степени (целом, $p = 1/2$, $p = 1/3$ и др.). Теперь нам остается вывести формулу для производной степенной функции при произвольном действительном показателе степени p. При этом полученные ранее формулы сохраняются. Именно при любом положительном x

$$(x^p)' = p \cdot x^{p-1}. \qquad (1)$$

Для доказательства воспользуемся основным логарифмическим тождеством: $x = e^{\ln x}$, откуда следует, что $x^p = e^{p \cdot \ln x}$. Отсюда по правилу вычисления производной сложной функции получаем:

$$(x^p)' = (e^{p \ln x})' = e^{p \ln x} (p \ln x)' = x^p \cdot p \cdot \frac{1}{x} = p \cdot x^{p-1}.$$

Формула (1) доказана.

При $p > 0$ степенная функция возрастает на промежутке $]0; \infty[$, поскольку ее производная $px^{p-1} > 0$ на нем.

При $p < 0$ степенная функция убывает на промежутке $]0; \infty[$, поскольку ее производная $px^{p-1} < 0$ на этом промежутке. Примеры графиков степенной функции при различных p приведены на рисунках 76а, 76б и 77.

Упражнения

Изобразите схематически график функции и вычислите ее производную:

711. $f(x) = x^{\sqrt{3}}$. **712.** $g(x) = x^{\frac{1}{\pi}}$. **713.** $u(x) = x^{-e}$.

116. Иррациональные уравнения

Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня, называют иррациональными. Например,

$$\sqrt[3]{x} - 2 = 0 \text{ (или } x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0).$$

Приведем примеры решения иррациональных уравнений.

Пример 1. Решим уравнение

$$\sqrt{x^2-5}=2. \qquad (1)$$

Возведем обе части этого уравнения в квадрат:

$$x^2-5=4.$$

Отсюда следует, что

$$x^2=9,\ x_1=3,\ x_2=-3.$$

Проверим, являются ли полученные числа решениями уравнения (1). Действительно, при подстановке их в уравнение (1) получаются верные равенства:

$$\sqrt{3^2-5}=2 \text{ и } \sqrt{(-3)^2-5}=2.$$

Следовательно, $x_1=3$ и $x_2=-3$ есть решения уравнения (1).

Пример 2. Решим уравнение

$$\sqrt{x}=x-2. \qquad (2)$$

Возведем в квадрат обе части уравнения (2):

$$x=x^2-4x+4.$$

После упрощений получаем квадратное уравнение

$$x^2-5x+4=0,$$

корни которого суть $x_1=1$ и $x_2=4$. Проверим, являются ли полученные числа решениями заданного уравнения (2). При подстановке числа 4 в уравнение (2) получаем верное равенство $\sqrt{4}=4-2$. При подстановке же числа 1 получаем в правой части -1, а в левой части — число $+1$. Следовательно, число 1 не является решением уравнения (2) — принято говорить, что это посторонний корень, полученный в результате принятого способа решения этого уравнения. Решением уравнения (2) является только число 4.

Пример 3. Решим уравнение

$$\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x}. \qquad (3)$$

Возведем обе части этого уравнения в квадрат:

$$x^2-2=x.$$

После упрощений получаем квадратное уравнение

$$x^2-x-2=0,$$

корни которого суть $x_1=-1$ и $x_2=2$. Сразу ясно, что число -1 не является корнем уравнения (3), так как обе части этого уравнения не определены при $x=-1$. При подстановке в уравнение (3) числа 2 получаем верное равенство $\sqrt{2^2-2}=\sqrt{2}$. Следовательно,

решением уравнения (3) является только число 2. Число -1 есть посторонний корень.

Пример 4. Решим уравнение

$$\sqrt{x-6}=\sqrt{4-x}. \qquad (4)$$

Возводя в квадрат обе части этого уравнения, получаем: $x-6=4-x$, $2x=10$ и $x=5$. Подстановкой убеждаемся, что число 5 не является корнем уравнения (4). Поэтому оно не имеет решений.

Мы видим, что ***при решении иррациональных уравнений полученные решения требуют проверки.***

Упражнения

Решите уравнение:

714. $\sqrt{13-x^2}=3$.

715. $\sqrt{x^2-4x-1}=2$.

716. $x-\sqrt{x+1}=5$.

717. $4+\sqrt{2x+3}=x-2$.

718. $\sqrt{x+1}\sqrt{x+6}=6$.

719. $\sqrt{x}\sqrt{2-x}=2x$.

720. $\dfrac{x+6}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{3x+2}$.

721. $\dfrac{x+1}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{x-1}$.

722. $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1$.

723. $\sqrt{x^2+x+1}=x-4$.

117*. Сравнение роста логарифмической, степенной и показательной функций

В этом пункте рассматриваются три функции: $\ln x$, x^p при положительном p и a^x при $a>1$. При неограниченном возрастании аргумента x значения этих функций неограниченно растут. Теперь мы сравним значения этих функций при одном и том же «очень большом» x.

Теорема 1. ***Существует такое число M, что для всех положительных x выполняется неравенство***

$$\frac{x^p}{a^x}\leqslant\frac{M}{x}. \qquad (1)$$

Для доказательства рассмотрим функцию $y=a^{-x}x^{p+1}$ и исследуем ее на экстремум при положительных x. Производная

$$y'=-a^{-x}\ln a\cdot x^{p+1}+(p+1)\,x^pa^{-x}=a^{-x}\,x^p\ln a\left(\frac{p+1}{\ln a}-x\right)$$

положительна при $x\in\left]0;\frac{p+1}{\ln a}\right[$ и отрицательна при $x\in\left]\frac{p+1}{\ln a};\infty\right[$.

Следовательно, в точке $\frac{p+1}{\ln a}$ рассматриваемая функция принимает наибольшее значение — обозначим его буквой M:

$$a^{-x}\cdot x^{p+1}\leqslant M$$

для всех положительных x.

Теорема 1 доказана, так как из полученного неравенства следует неравенство (1).

Смысл этой теоремы состоит в том, что при больших x дробь $\frac{x^p}{a^x}$ мала, т. е. знаменатель во много раз больше числителя. Коротко об этом говорят так: при x, стремящемся к бесконечности, показательная функция растет быстрее степенной.

Теорема 2. ***Существует такое число М, что для всех $x>1$ выполняется неравенство***

$$\frac{\ln x}{x^p}\leqslant\frac{M}{x^{\frac{p}{2}}}. \tag{2}$$

Для доказательства рассмотрим функцию $y=\frac{\ln x}{x^{\frac{p}{2}}}$ и исследуем ее на экстремум при $x>1$. Производная

$$y'=\frac{1}{x}\cdot x^{-\frac{p}{2}}+\ln x\left(-\frac{p}{2}\right)x^{-\frac{p}{2}-1}=\frac{p}{2x^{1+\frac{p}{2}}}\left(\frac{2}{p}-\ln x\right)$$

положительна при $x\in\left]1;\ e^{\frac{2}{p}}\right[$ и отрицательна при $x\in\left]e^{\frac{2}{p}};\ \infty\right[$. Следовательно, в точке $e^{\frac{2}{p}}$ рассматриваемая функция имеет наибольшее значение — обозначим его буквой M:

$$\frac{\ln x}{x^{\frac{p}{2}}}\leqslant M \text{ для всех } x>1.$$

Разделив обе части этого неравенства на $x^{\frac{p}{2}}$, получаем неравенство (2). Теорема 2 доказана.

Смысл этой теоремы аналогичен смыслу теоремы 1 — при больших x знаменатель дроби $\frac{\ln x}{x^p}$ во много раз больше ее числителя. Коротко об этом говорят так: при x, стремящемся к бесконечности, степенная функция растет быстрее логарифмической.

Теорема 3. ***Существует такое число М, что для всех $x\in\,]0;\ 1[$ выполняется неравенство***

$$|x^p\ln x|\leqslant x^{\frac{p}{2}}M. \tag{3}$$

Эта теорема следует из теоремы 2 (так как $\frac{1}{x} > 1$)

$$|x^p \ln x| = \frac{\ln \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^p} \leqslant \frac{M}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{2}}} = x^{\frac{p}{2}} M.$$

Наглядный смысл этой теоремы состоит в том, что произведение $x^p \ln x$ может быть сделано как угодно малым для всех достаточно малых положительных x.

118*. Сведения из истории

Дробные показатели степени и наиболее простые правила действий над степенями с дробными показателями встречались в XIV веке у французского математика Н. Орема (1323—1382). Француз Н. Шюке (XV век) рассматривал степени с отрицательными и нулевым показателями.

Немецкий математик М. Штифель (1486—1567) ввел название «показатели» (exponenten) и дал определение $a^0 = 1$ при $a \neq 0$. Сопоставляя натуральные числа с натуральными степенями одного и того же основания, он для этого частного случая пришел к соотношениям $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$, $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$.

Логарифмы были введены (независимо друг от друга) английским математиком Дж. Непером (1550—1617) и швейцарским математиком И. Бюрги (1552—1632). Теорию логарифмов развил Непер. Он разработал способы вычисления арифметических выражений с помощью логарифмов и составил подробные таблицы логарифмов. Таблицы Непера мало отличались от современных таблиц натуральных логарифмов. Десятичные логарифмы были введены английским математиком Г. Бриггсом (1561—1617). Лейбниц еще в конце XVII века с помощью правил логарифмирования решал показательные уравнения. Использование таблиц логарифмов, а позже логарифмической линейки значительно упростило вычисления, и они долго были одним из основных средств вычислений. Французский математик Лаплас говорил даже, что изобретение логарифмов удлинило жизнь вычислителей.

Дополнительные упражнения к главе VIII

Изобразите схематически график функции:

724. $y = 0{,}7^x$.	**728.** $y = \log_5 x$.	**732.** $y = \|\lg x\|$.
725. $y = 2{,}3^x$.	**729.** $y = \log_{0,6} x$.	**733.** $y = \lg \|x\|$.
726. $y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$.	**730.** $y = \log_{1,7} x$.	**734.** $y = \lg(-x)$.
727. $y = 3^x$.	**731.** $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.	**735*.** $y = \lg(3 - x)$.

736. $y = \lg (x - 3)$.
737. $y = \lg (x + 3)$.
738. $y = \lg x + 3$.
739*. $y = |\log_2 x + 1|$.

Вычислите производную функции:

740. e^{3x}.
741. $3e^{-2x}$.
742. $\frac{7}{e^{5x}}$.
743. $\left(\frac{1}{e^{2x}}\right)^3$.
744. 3^x.
745. 5^{-4x}.
746. $\frac{3}{7^{2x}}$.
747. $\left(\frac{5}{1{,}7^{3x}}\right)^2$.
748. 9^{2-5x}.
749. $0{,}3^{7-2x}$.
750. $e^{\sin x}$.
751. $e^{\cos x}$.
752. $3^{5\,\mathrm{tg}\,x}$.
753. $7^{2\,\mathrm{ctg}\,x}$.
754*. $5^x \sin 2x$.
755*. $\frac{2^x}{\cos x}$.
756*. $\sqrt[3]{x} \cdot \mathrm{tg}\,x$.
757*. $\frac{\mathrm{ctg}\,x}{\sqrt{x}}$.
758*. $\frac{2^{\frac{x}{3}}}{x^4 + 3}$.
759*. $\frac{0{,}3^x}{\mathrm{tg}\,x + 5}$.
760. $\log_2 x$.
761. $\log_{\frac{1}{3}} x$.
762. $\log_9 (3 - 2x)$.
763. $\log_{0,2} (7 + 5x)$.
764. $\lg 5x$.
765. $\lg (3 + 4x)$.
766. $\ln (\sin x)$.
767. $\ln (\mathrm{tg}\,x)$.
768*. $3^x \ln (5x)$.
769*. $\frac{\sin x}{\ln (7x)}$.
770*. $\frac{\ln (2x)}{\sqrt{x} + 3}$.
771*. $x^3 \ln x$.
772*. $\log_{11} (x^3 + 4\sqrt{x} + 5)$.
773*. $\lg (\sin 3x + 2^x)$.

Найдите область определения функции:

774. $\log_3 (x - 1)$.
775. $\log_{0,2} (x + 2)$.
776. $\log_\pi (4 - x)$.
777. $\lg (3 - 2x)$.
778. $\ln (3 + 2x)$.
779. $\lg (2x - 3)$.
780. $\log_2 (x^2 - 2x - 3)$.
781. $\log_7 (6 + x - x^2)$.
782. $\log_{\frac{1}{4}} (x^2 - 4x + 6)$.
783. $\log_{2,5} (x^2 + 6x + 9)$.

Найдите первообразную функции:

784. e^{2x}.
785. $7e^{-x}$.
786. $5e^{\frac{x}{3}}$.
787. $\sqrt{e^{3x}}$.
788. 5^{-x}.
789. $\frac{5}{3^{2x}}$.
790. $4\sqrt[3]{7^{5x}}$.
791. $\frac{10}{\sqrt{8^x}}$.
792. $\frac{1}{x + 7}$.
793. $\frac{3}{5x + 1}$.
794. $\frac{5}{3 - 2x}$.
795. $\frac{4}{7 - 5x}$.
796. $\frac{1}{8x}$.
797. $\sqrt[7]{x^3}$.
798. $\frac{2}{\sqrt[5]{x^4}}$.
799. x^π.

Вычислите интеграл:

800. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. **801.** $\int_0^3 e^x\,dx$. **802.** $\int_{-1}^3 3^x\,dx$. **803.** $\int_{-2}^0 \frac{dx}{3x+7}$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

804. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$.
805*. $y = 5^x$, $y = 3^{-x}$, $x = 2$.
806*. $y = 4^x$, $y = x + 1$, $x = 3$.
807*. $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 10$.
808*. $y = \frac{3}{x}$, $y = 3$, $x = 2$.
809. $y = \frac{2}{x}$, $y = x + 1$, $x = 3$.
810*. $y = \frac{3}{x}$, $x + y = 4$.

Напишите уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

811. $f(x) = e^{2x}$, $x_0 = 0$.
812. $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$, $x_0 = 0$.
813. $f(x) = 10^x$, $x_0 = 1$.
814. $f(x) = 3^{-x}$, $x_0 = 1$.
815. $f(x) = \ln(2x)$, $x_0 = \frac{1}{2}$.
816. $f(x) = \lg(3x)$, $x_0 = \frac{1}{3}$.

Пользуясь таблицами десятичных логарифмов, найдите:

817. $\log_2 7$. **818.** $\log_3 11$. **819.** $\log_{0,7} 5{,}3$. **820.** $\log_{3,1} 0{,}17$. **821.** $\sqrt[5]{1{,}7}$. **822.** $2{,}3^{\sqrt{2}}$. **823.** $\sqrt[3]{\pi}$. **824.** e^π.

Что больше:

825. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ или $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$?
826. $\log_2 3$ или $\log_3 2$?
827. $\log_7 3$ или $\log_5 9$?
828. $\log_{11} 7$ или $\log_{13} 19$?

Исследуйте на возрастание (убывание) и экстремум функцию:

829*. $f(x) = \ln^2 x$.
830*. $f(x) = x \ln^2 x$.
831*. $g(x) = e^x \sin x$.
832*. $u(x) = \frac{\ln x^2}{1 + \ln^2 x}$.
833*. $v(x) = \mathrm{tg}^3\, x - 3\,\mathrm{tg}\, x$.
834*. $h(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$.

Глава IX СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

§ 24.

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

119. Равносильные уравнения и системы уравнений

Вы уже много занимались решением уравнений и систем уравнений. Сейчас перед вами стоит задача систематизировать и пополнить ваши знания в этой области. Ниже рассмотрены уравнения с двумя переменными x и y, но легко заметить, что все сказанное в п. 119 относится и к уравнениям с любым числом переменных.

Уравнение с двумя переменными x и y записывается в виде

$$f(x; y) = g(x; y), \qquad (1)$$

где f и g — выражения с переменными x и y.

Решением уравнения (1) называется, как вы знаете, *упорядоченная пара чисел* $(x_0; y_0)$, *при подстановке которых вместо* x *и* y *в уравнение* (1) *получается верное равенство*

$$f(x_0; y_0) = g(x_0; y_0).$$

Например, пары (0; —1), (1; 0) и (2; 1) являются решениями уравнения

$$x - y = 1. \qquad (2)$$

Замечание. Определение решения предполагает, что переменные даны в определенном порядке. В рассмотренном примере мы считаем переменную x первой, а переменную y — второй. Говоря «пара чисел», мы всегда имеем в виду упорядоченную пару чисел. Пара (0; 1) отличается от пары (1; 0) и, в отличие от этой последней, не является решением уравнения (2).

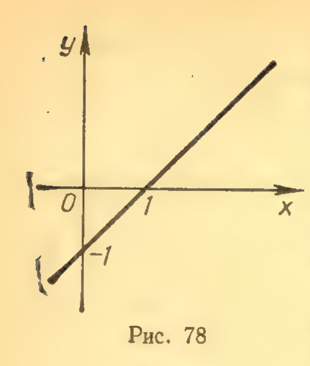


Рис. 78

Два уравнения называются равносильными, если они имеют одно и то же множество решений. Например, уравнение (2) равносильно уравнению

$$y = x - 1.$$

Множество решений каждого из этих уравнений есть прямая числовой плоскости, изображенная на рисунке 78. Утверждение о равносильности двух уравнений, как вам уже известно из седьмого класса, записывают при помощи знака равносильности в виде двойной стрелки $\Leftrightarrow$. Например,

$$(x - y = 1) \Leftrightarrow (y = x - 1).$$

Уравнение (1) равносильно уравнению

$$f(x; y) - g(x; y) = 0.$$

Поэтому, не нарушая общности рассмотрений, можно считать, что уравнение с двумя переменными записано в виде

$$F(x; y) = 0.$$

В таком виде (правая часть — нуль), например, вы привыкли записывать квадратные уравнения:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Обратимся теперь к системам уравнений. *Система уравнений — это конечное множество уравнений.* Например, множество из двух уравнений

$$S = \{x^2 + y^2 = 2;\ x^2 - y^2 = 0\}$$

есть система уравнений. Только записывают системы уравнений несколько иначе: уравнения записывают друг под другом, а из фигурных скобок часто ставят только одну (слева или справа):

$$S = \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 0. \end{cases}$$

Решением системы уравнений с двумя переменными называют *упорядоченную пару чисел, являющуюся решением каждого из уравнений, входящих в систему.* Ясно, что множество решений системы есть не что иное, как пересечение множеств решений входящих в систему уравнений.

Например, в приведенной выше системе S первое уравнение есть уравнение окружности радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат. Второе уравнение системы переписывается в виде

$$(x^2 - y^2 = 0) \Leftrightarrow ((x + y)(x - y) = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ \text{или} \\ x - y = 0. \end{cases}$$

График уравнения $x^2 - y^2 = 0$ есть пара прямых, $y = x$ и $y = -x$. Пересечение этого множества с окружностью состоит из четырех точек. Эти четыре точки

$$(1; 1), (1; -1), (-1; 1), (-1; -1)$$

числовой плоскости и есть четыре решения системы S (рис. 79). Проверьте это!

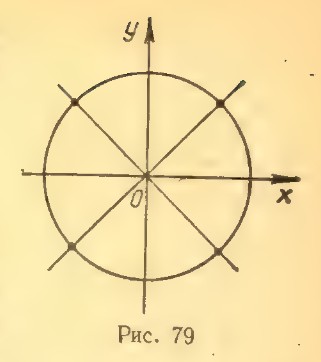


Рис. 79

З а м е ч а н и е. Обратите внимание, что множество решений уравнения $x^2 - y^2 = 0$ есть объединение множеств решений уравнений $x + y = 0$ и $x - y = 0$, а отнюдь не множество решений системы $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0, \end{cases}$ которое состоит из одной точки (0; 0).

Две системы уравнений называются равносильными, если они имеют одно и то же множество решений. При решении системы уравнений стараются переходить последовательно от данной системы уравнений к равносильным ей все более простым системам, пока не получат систему, решения которой находятся без труда. Отметим простейшие способы преобразования систем уравнений в равносильные системы.

1. **Правило замены уравнения на равносильное.** Заменив в системе одно из уравнений на равносильное, получим систему, равносильную первоначальной.

2. **Правило подстановки.** Если одно из уравнений системы имеет вид

$$x = A$$

(A — произвольное выражение, не содержащее x), то, заменив во всех остальных уравнениях системы переменную x на выражение A, получим равносильную первоначальной систему.

П р и м е р на применение правил 1 и 2. Требуется решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ 2x + 4y = 6. \end{cases}$$

Так как

$$(2x + 4y = 6) \Leftrightarrow (x = 3 - 2y),$$

то имеем равносильности:

$$\begin{Bmatrix} x^2 + y^2 = 9 \\ 2x + 4y = 6 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2 + y^2 = 9 \\ x = 3 - 2y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (3 - 2y)^2 + y^2 = 9 \\ x = 3 - 2y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 5y^2 - 12y = 0 \\ x = 3 - 2y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 0 \text{ или } y = \frac{12}{5} \\ x = 3 - 2y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 3,\ y = 0) \text{ или } \left(x = -\frac{9}{5},\ y = \frac{12}{5}\right).$$

3. Правило сложения. Если в систему входят уравнения

$$A = B \text{ и } C = D$$

(A, B, C и D — какие-то выражения относительно переменных), то одно из этих уравнений, например второе, можно заменить на уравнение

$$A + C = B + D.$$

Получится равносильная система. Это правило выражают словесно так: ***любое уравнение системы можно заменить на уравнение, которое получается при его сложении с любым другим уравнением системы.***

Например, система

$$(S) = \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

равносильна системе

$$(S_1) = \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + 3z = 3, \end{cases}$$

где второе уравнение системы (S_1) получено сложением второго уравнения системы (S) с первым.

Проведем доказательство для случая трех уравнений с двумя переменными. Пусть (x_0; y_0) — решение системы

$$\begin{cases} A = B \\ C = D \\ E = F. \end{cases} \qquad (3)$$

Это означает, что верны равенства

$$\begin{aligned} A(x_0; y_0) &= B(x_0; y_0) \\ C(x_0; y_0) &= D(x_0; y_0) \\ E(x_0; y_0) &= F(x_0; y_0). \end{aligned}$$

Но тогда верно равенство

$$A(x_0; y_0) + C(x_0; y_0) = B(x_0; y_0) + D(x_0; y_0),$$

а это и означает, что (x_0; y_0) — решение системы

$$\begin{cases} A = B \\ A + C = B + D \\ E = F. \end{cases} \qquad (4)$$

Обратно, если (x_0; y_0) — решение системы (4), то верны равенства

$$\begin{aligned} A(x_0; y_0) &= B(x_0; y_0) \\ A(x_0; y_0) + C(x_0; y_0) &= B(x_0; y_0) + D(x_0; y_0) \\ E(x_0; y_0) &= F(x_0; y_0). \end{aligned}$$

Вычитая почленно из второго равенства первое, получаем

$$C(x_0; y_0) = D(x_0; y_0).$$

Поэтому (x_0; y_0) — решение системы (3).

Таким образом доказано, что множества решений систем (3) и (4) совпадают, значит, эти системы равносильны.

4. **Правило умножения.** Если выражение C не обращается в нуль, то уравнение

$$A = B$$

равносильно уравнению

$$CA = CB.$$

Например,

$$\left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} = 1\right) \Leftrightarrow (x^2 - 2x = x^2 + 1) \Leftrightarrow (-2x = 1) \Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{2}\right).$$

В частности, уравнение превращается в равносильное при умножении на отличную от нуля константу.

120. Решение систем линейных уравнений методом последовательного исключения переменных *(метод Гаусса)*

Линейным уравнением с переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется уравнение вида*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b. \qquad (1)$$

В шестом классе было условлено не рассматривать случай, когда все коэффициенты a_i равны нулю. Сейчас это нецелесообразно. Линейным уравнением мы будем называть любое уравнение вида (1). Заметим только, что в случае

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = b = 0$$

любой набор чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является решением уравнения (1), а в случае

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0, \ \ b \neq 0$$

уравнение (1) совсем не имеет решений.

Сейчас мы познакомимся с общим способом решения систем линейных уравнений. Начнем с примера.

Пример 1. Дана система

$$(S) = \begin{cases} 2x - 4y + 4z = 10 \\ -3x + 8y - 10z = -25 \\ 4x - 3y + z = 1. \end{cases}$$

Преобразуем ее в равносильную систему так, чтобы в первом уравнении переменная x стояла с коэффициентом единица, а в другие уравнения не входила вовсе. Для этого разделим почленно первое уравнение системы (S) на коэффициент при x, т. е. на 2. Получим первое уравнение новой системы

$$x - 2y + 2z = 5.$$

Прибавляя почленно это уравнение, умноженное на 3, ко второму уравнению исходной системы и, умноженное на —4, к третьему

уравнению исходной системы, получим равносильную исходной систему, в которой переменная x будет исключена из второго и третьего уравнений:

$$(S_1) = \begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ \quad 2y - 4z = -10 \\ \quad 5y - 7z = -19. \end{cases}$$

Второе и третье уравнения системы (S_1) содержат только переменные y и z. Деля почленно второе уравнение на 2, получим уравнение

$$y - 2z = -5$$

с коэффициентом единица при переменной y. Прибавляя почленно это уравнение, умноженное на -5, к третьему уравнению системы (S_1), получим

$$3z = 6.$$

В результате мы получили систему

$$(S_2) = \begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ \quad y - 2z = -5 \\ \quad\quad 3z = 6. \end{cases}$$

Разделив последнее уравнение на 3, приходим, наконец, к системе

$$(S_3) = \begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ \quad y - 2z = -5 \\ \quad\quad z = 2, \end{cases}$$

в которой коэффициенты на диагонали равны единице, а коэффициенты влево от диагонали равны нулю (их мы не пишем). Такая система легко решается:

$$z = 2,\ y = -5 + 2z = -1,\ x = 5 + 2y - 2z = -1.$$

Ответ. $\{(-1; -1; 2)\}$.

Система вида (S_3) называется *треугольной*. Решение системы линейных уравнений приведением к треугольной форме называется *методом Гаусса*.

Поступая подобным образом с произвольной системой m линейных уравнений с n неизвестными, можно или обнаружить, что она совсем не имеет решений, или привести ее к равносильной системе вида

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad x_p + \ldots + a_{pn}x_n = b_p, \end{cases} \tag{2}$$

где $p \leqslant n$. Если $p = n$, т. е. последнее уравнение имеет вид

$$x_n = b_n,$$

то система в этом случае имеет единственное решение (как это было в примере 1). Если $p < n$, то произвольное решение системы находится так: переменным

$$x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$$

можно придать произвольные значения; значения

$$x_p, x_{p-1}, \ldots, x_1$$

вычисляются последовательно из уравнений системы (2). Так будет, например, если исходная система есть урезанная система (S) примера 1.

Пример 2. Решим систему уравнений

$$(S') = \begin{cases} 2x - 4y + 4z = 10 \\ -3x + 8y - 10z = -25. \end{cases}$$

Повторяя выкладки примера 1, получаем систему

$$(S'') = \begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ y - 2z = -5. \end{cases}$$

Общее решение получаем, считая z произвольным:

$$y = -5 + 2z,$$
$$x = 5 + 2y - 2z = 5 + 2(-5 + 2z) - 2z = -5 + 2z.$$

Решений системы (S') бесконечное множество.

Ответ. $\{(2z - 5; 2z - 5; z) \mid z \in \mathbf{R}\}$.

Так может случиться и тогда, когда уравнений столько же или даже больше, чем переменных, как это будет видно из решения примера 3.

При решении методом Гаусса систем линейных уравнений могут встретиться такие особенности:

1) могут появляться уравнения вида $0 = 0$. Их просто вычеркивают из системы уравнений;

2) иногда для получения на диагонали коэффициента 1 приходится менять порядок расположения переменных (см. пример 3);

3) может получиться уравнение вида $0 = b$, где $b \neq 0$. Это значит, что система, вообще, не имеет решений.

Пример 3.

$$(U) = \left\{\begin{aligned} x + y - z - 2t &= 1 \\ 2x + 2y - z - 2t &= 4 \\ -x - y + 2z + 3t &= 3 \\ 3x + 3y + z \qquad &= 15 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x + y - z - 2t &= 1 \\ z + 2t &= 2 \\ z + t &= 4 \\ 4z + 6t &= 12. \end{aligned}\right.$$

Поставив на второе место z, продолжим выкладки:

$$(U) \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x - z - 2t + y &= 1 \\ z + 2t &= 2 \\ z + t &= 4 \\ 4z + 6t &= 12 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x - z - 2t + y &= 1 \\ z + 2t &= 2 \\ -t &= 2 \\ -2t &= 4 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x - z - 2t + y &= 1 \\ z + 2t &= 2 \\ t &= -2 \end{aligned}\right\}.$$

Четвертое уравнение вида $0=0$ не записано. Общее решение системы (U) получаем, считая y произвольным:

$$t=-2,\ z=2-2t=6,\ x=1+z+2t-y=3-y.$$

Ответ. $\{(3-y;\ y;\ 6;\ -2)\mid y\in R\}$.

Пример 4. Решим систему

$$(V)=\begin{cases} x-\ y+\ z=0\\ 2x+\ y-3z=-7\\ 3x+3y-7z=2.\end{cases}$$

Исключим переменную x из второго и третьего уравнений системы

$$(V)\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned} x-\ y+z\ &=0\\ 3y-\ 5z&=-7\\ 6y-10z&=2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned} x-\ y+\ z&=0\\ 3y-5z&=-7\\ 0\cdot z&=16\end{aligned}\right\}.$$

Последнее уравнение равносильно уравнению $0=16$, т. е. противоречиво. Поэтому исходная система не имеет решений.

Подведем итог. Система линейных уравнений может:

1) совсем не иметь решений;

2) иметь единственное решение;

3) иметь бесконечно много решений.

В последнем случае значения некоторых переменных остаются совсем произвольными, а по ним однозначно вычисляются значения остальных переменных.

Заметим еще, что при числе уравнений, равном числу переменных, возможны все три случая, но, «вообще говоря», имеет место второй случай.

Если число уравнений меньше числа переменных, то второй случай невозможен. «Вообще говоря», имеет место третий случай.

Если число уравнений больше числа переменных, возможны все три случая, но, «вообще говоря», имеет место первый случай.

Упражнения

Решите систему уравнений:

835. $\begin{cases} x-3y=1\\ 2x+\ y=4\frac{1}{3}.\end{cases}$

836. $\begin{cases} 2x+3y=-1\\ 5x+4y=1.\end{cases}$

837. $\begin{cases} 7x-2y=-1\\ 3x-5y=12.\end{cases}$

838. $\begin{cases} 3x-\ 9y=12\\ 4x-12y=16.\end{cases}$

839. $\begin{cases} 2x+6y=5\\ x+3y=2{,}5.\end{cases}$

840. $\begin{cases} 4x-6y\ =8\\ x-1{,}5y=2.\end{cases}$

841. $\begin{cases} x+\ 2y\ =\ 7\\ 2x+\ 4y\ =\ 9.\end{cases}$

842. $\begin{cases} 5x-\ 8y\ =0\\ x-1{,}6y=1.\end{cases}$

843. $\begin{cases} x+y\ =\ 7\\ 2x+\ 2y=\ 11.\end{cases}$

При каком значении параметра a система имеет бесконечно много решений?

844. $\begin{cases} ax-3y=4\\ x-\ y=\frac{4}{3}.\end{cases}$

845. $\begin{cases} x+ay=2\\ 3x-2y=6.\end{cases}$

846. $\begin{cases} x+1{,}5y=4\\ 4x+6y\ =a.\end{cases}$

При каком значении параметра a система не имеет решений?

847. $\begin{cases} 2x + ay = 8 \\ 3x - 5y = 6. \end{cases}$ **848.** $\begin{cases} x - y = 3 \\ ax + 2y = -6. \end{cases}$ **849.** $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = a. \end{cases}$

Можно ли указать значение параметра a, при котором система имеет решение?

850. $\begin{cases} x - 5y = 7 \\ ax + y = -3. \end{cases}$ **851.** $\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + 4y = 5. \end{cases}$ **852.** $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ ax + y = -3. \end{cases}$

Решите систему уравнений:

853. $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - y + 2z = -7 \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$

854. $\begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ 2x - y + z = 2 \\ 3x - 5y + 2z = -7. \end{cases}$

855. $\begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ 2x + y - 5z = 9 \\ 4x - 3y + z = 7. \end{cases}$

856. $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + 5y + z = -10 \\ x + y + 3z = -10. \end{cases}$

857. $\begin{cases} x - y - z = 5 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ x - 4y - 6z = 7. \end{cases}$

858. $\begin{cases} x - 3y + z = 7 \\ 3x + y - 2z = 3 \\ x + 7y - 4z = 0. \end{cases}$

859*. $\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 2x - y - z + 2t = 7 \\ 3x + 2y - 5z + t = 3 \\ x - 2y + 3z + t = 5. \end{cases}$

121. Геометрическая иллюстрация решения систем линейных уравнений с двумя и тремя переменными

Будем считать, что в каждом из уравнений системы хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля. Как вы знаете из курса геометрии, в этом случае линейное уравнение с двумя переменными определяет прямую на плоскости, а линейное уравнение с тремя переменными — плоскость в пространстве.

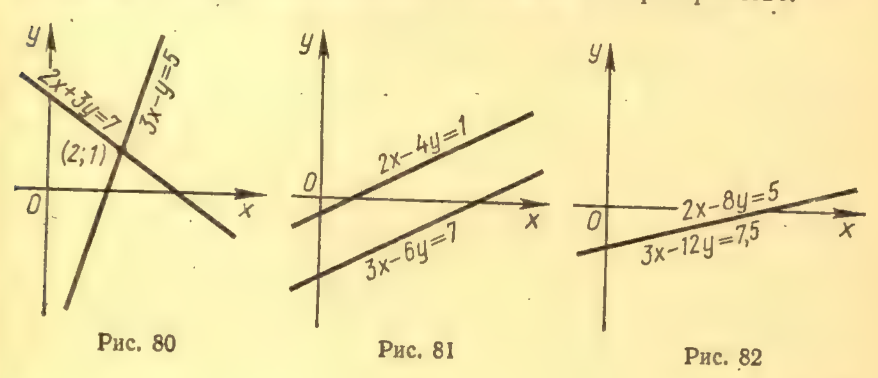
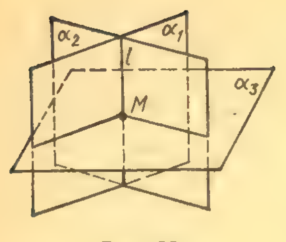
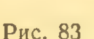


Рис. 80 Рис. 81 Рис. 82




Рис. 83

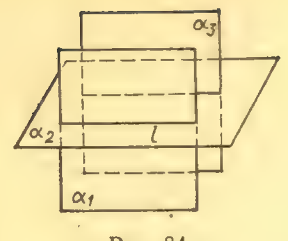


Рис. 84

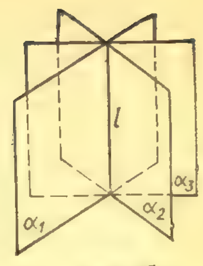


Рис. 85

Уравнения системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

определяют две прямые на плоскости. Они либо 1) пересекаются, либо 2) параллельны и не имеют общих точек, либо 3) параллельны и совпадают. В первом случае система имеет одно решение (рис. 80), во втором — множество решений системы пусто (рис. 81), в третьем — система имеет бесконечное множество решений (множество решений есть прямая на числовой плоскости, рис. 82).

Система трех линейных уравнений с тремя переменными задает в пространстве три плоскости. Рассмотрим возможные случаи взаимного расположения трех плоскостей в пространстве.

А. Все три плоскости различны.

В. Две плоскости совпадают, а третья отлична от них.

С. Все три плоскости совпадают.

Разберем отдельно каждую из этих возможностей.

А. Если какие-либо две плоскости α_1 и α_2 пересекаются, то возможны три случая: 1) третья плоскость α_3 пересекает линию пересечения l плоскостей α_1 и α_2 (рис. 83); 2) α_3 параллельна l и не имеет с ней общих точек (рис. 84); 3) α_3 содержит l (рис. 85). Если же пересекающихся плоскостей нет, то имеет место случай 4) — все три плоскости параллельны (рис. 86).

В. Возможны два случая: 5) третья плоскость α_3 пересекает совпадающие плоскости α_1 и α_2 (рис. 87); 6) α_3 параллельна совпадающим

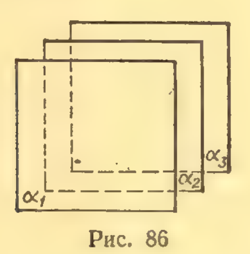


Рис. 86

Рис. 87

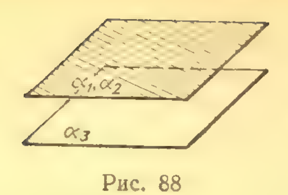


Рис. 88

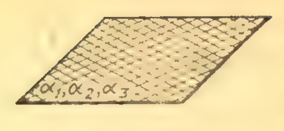


Рис. 89

плоскостям α_1 и α_2 и не имеет с ними общих точек (рис. 88). На рисунках 87 и 88 совпавшие плоскости заштрихованы.

С. Имеет место случай 7) — все три плоскости совпадают (рис. 89).

В случае 1) система имеет одно решение, в случаях 3), 5) и 7) — бесконечное множество решений, в случаях 2), 4) и 6) — множество решений пусто.

Для удобства полученные результаты сведены в таблицу.

		Случай	Пересечение
А. Все три плоскости различны	3 плоскости пересекаются в точке	1	Точка
	2 плоскости пересекаются по прямой, параллельной третьей	2	Пустое множество
	2 плоскости пересекаются по прямой, лежащей в третьей	3	Прямая
	Плоскости параллельны	4	Пустое множество
В. Две плоскости совпадают, а третья отлична от них	Совпадающие плоскости пересекаются с третьей	5	Прямая
	Совпадающие плоскости параллельны третьей	6	Пустое множество
С. Все три плоскости совпадают	——	7	Плоскость

Аналогично числовой прямой и числовой плоскости можно рассмотреть числовое пространство R^3 — множество упорядоченных троек действительных чисел. Тогда каждое решение уравнения (системы уравнений) с тремя переменными можно рассматривать как точку числового пространства R^3. С этой точки зрения случаи 3) и 5) отличаются от случая 7): в 3) и 5) множество решений системы — прямая в числовом пространстве, в случае 7) — плоскость в числовом пространстве.

122. Нелинейные уравнения и системы уравнений

В этом пункте мы рассмотрим лишь некоторые специальные приемы решения нелинейных уравнений и некоторые возникающие при их решении трудности.

1. Иногда одно уравнение оказывается равносильным системе из двух уравнений. Например, уравнение

$$(x+y)^2+(x+1)^2=0 \qquad (1)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+1=0 \end{cases}$$

(так как сумма неотрицательных чисел может равняться нулю только тогда, когда оба они равны нулю). Поэтому уравнение (1) с двумя переменными имеет только одно решение (—1; 1).

2. Иногда множество решений уравнения является объединением множеств решений двух уравнений. Например, уравнение

$$x^2-y^2=0 \qquad (2)$$

равносильно уравнению

$$(x+y)(x-y)=0.$$

Так как произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, то множество решений уравнения (2) есть объединение множеств решений уравнений

$$x+y=0 \ (2а) \text{ и } x-y=0 \ (2б).$$

Решая систему

$$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ (x-1)^2+y^2=4, \end{cases}$$

мы должны решить две системы

$$\begin{cases} x+y=0 \\ (x-1)^2+y^2=4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-y=0 \\ (x-1)^2+y^2=4 \end{cases}$$

и взять все полученные решения (рис. 90).

В виде второго примера рассмотрим систему

$$\begin{cases} (x+y)^2=1 \\ 2x-3y=7. \end{cases} \qquad (3)$$

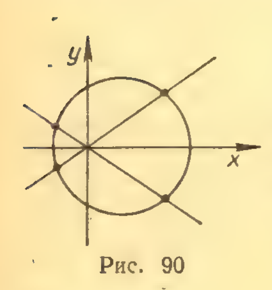


Рис. 90

Первое уравнение равносильно требованию, что либо $x+y=1$, либо $x+y=-1$. Поэтому множество решений системы (3) есть объединение множеств решений систем

$$\left.\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-3y=7 \end{cases}\right\}, \ (3а) \quad \left.\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x-3y=7 \end{cases}\right\}. \qquad (3б)$$

Равносильность уравнения $(x+y)^2 = 1$ требованию, чтобы выполнялось хотя бы одно из уравнений $x + y = 1$ или $x + y = -1$, можно записать в виде равносильности*

$$((x+y)^2 = 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 1 \\ \text{или} \\ x + y = -1. \end{array}\right.$$

Не следует путать эту запись с записью равносильности уравнения системе уравнений*.

3. Во многих случаях левая и правая части уравнения

$$f(x, y) = g(x, y)$$

определены не при всех значениях переменных. Например, левая часть уравнения

$$\frac{x}{y} = 2 \qquad (4)$$

имеет смысл лишь в предположении $y \neq 0$. Поэтому уравнение $\frac{x}{y} = 2$ не равносильно уравнению $x = 2y$.

Множество решений уравнения (4) состоит из всех пар вида $(2a; a)$, за исключением пары $(0; 0)$.

Правильной будет равносильность

$$\left(\frac{x}{y} = 2\right) \Leftrightarrow \{x = 2y, y \neq 0\},$$

где справа стоит система, состоящая из одного уравнения и одного неравенства.

Но можно записать утверждение, что из равенства (4) следует равенство $x = 2y$:

$$\left(\frac{x}{y} = 2\right) \Rightarrow (x = 2y).$$

Говорят, что для уравнения (4) уравнение $x = 2y$ является *выводным* уравнением.

При решении систем уравнений можно вместо перехода от них к равносильным системам переходить к выводным системам. Но потом надо проверять полученные решения выводной системы. Например,

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 5y^2 - 4y = 0. \end{cases}$$

---

* В некоторых учебных пособиях считают, что квадратная скобка уже содержит в себе слово «или», и пишут просто

$$((x+y)^2 = 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + y = -1. \end{array}\right.$$

Говорят также, что уравнение $(x+y)^2 = 1$ равносильно «совокупности» уравнений $x + y = 1$ и $x + y = -1$.

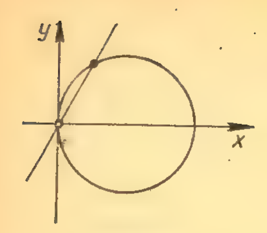


Рис. 91

Из двух решений выводной системы (0; 0) и $\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$ решением исходной системы является только второе*.

Рассмотрим более сложные примеры.

Пример 1. Решим систему

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ x + y = 5. \end{cases} \qquad (5)$$

Пользуясь теоремой о замене, получаем

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{5-x} + \frac{5-x}{x} = \frac{13}{6} \\ y = 5 - x. \end{cases}$$

Решим первое уравнение и запишем решения системы:

$$\left\{\frac{x^2 + (5-x)^2}{x(5-x)} = \frac{13}{6}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 6(x^2 + (5-x)^2) = 13x(5-x) \\ x(5-x) \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x(5-x) \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow (x = 2 \text{ или } x = 3).$$

Ответ. $\{(2; 3); (3; 2)\}$.

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2 \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y. \end{cases}$$

Поскольку

$$\lg(x^2 + y^2) = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 100,$$

$$\log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{16} = \frac{3}{y} \\ x > 0 \\ y > 0, \end{cases}$$

то исходная система равносильна системе двух уравнений и двух неравенств:

$$\left\{\begin{matrix} \lg(x^2 + y^2) = 2 \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2 + y^2 = 100 \\ \frac{x}{16} = \frac{3}{y} \\ x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2 + y^2 = 100 \\ xy = 48 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}\right\}.$$

* На рисунке 91 черным кружком отмечено решение выводной системы, являющееся и решением исходной, а белым кружком — «лишнее» решение, возникающее при почленном умножении первого уравнения на y.

При дальнейших выкладках ограничения $x > 0$ и $y > 0$ можно не выписывать, но тогда надо проверить, удовлетворяют ли им решения выводной системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ xy = 48. \end{cases} \qquad (6)$$

Вычитая удвоенное второе уравнение из первого, получаем:

$$\begin{Bmatrix} x^2 + y^2 = 100 \\ xy = 48 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (x - y)^2 = 4 \\ xy = 48 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x - y = 2 \\ xy = 48 \end{Bmatrix} \text{ или } \begin{Bmatrix} x - y = -2 \\ xy = 48 \end{Bmatrix}.$$

Решая первую из полученных систем, получаем:

$$\begin{Bmatrix} x - y = 2 \\ xy = 48 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = x - 2 \\ x(x - 2) = 48 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 8 \\ y = 6 \end{Bmatrix} \text{ или } \begin{Bmatrix} x = -6 \\ y = -8 \end{Bmatrix}.$$

Для второй системы имеем:

$$\begin{Bmatrix} x - y = -2 \\ xy = 48 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = x + 2 \\ x(x + 2) = 48 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 6 \\ y = 8 \end{Bmatrix} \text{ или } \begin{Bmatrix} x = -8 \\ y = -6 \end{Bmatrix}.$$

Проверка показывает, что из четырех решений выводной системы (6) удовлетворяют условию $x > 0$, $y > 0$ лишь два: (6; 8) и (8; 6).

Ответ. {(6; 8); (8; 6)}.

Пример 3*. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6} \\ 5(\sin 2x + \sin 2y) = 2(1 + \cos^2(x - y)). \end{cases} \qquad (7)$$

Делаем подстановку $y = \frac{\pi}{6} - x$ и преобразуем левую часть второго уравнения:

$$5\left(\sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\right) = 5 \cdot 2 \sin\frac{\pi}{6} \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 5\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Отсюда второе уравнение системы (7) равносильно уравнению

$$5\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 + 2\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Поэтому в силу теоремы о замене система (7) равносильна системе:

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{6} - x \\ 5\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 + 2\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Второе уравнение этой системы есть квадратное уравнение относительно $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$:

$$2\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-5\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2=0.$$

Находим корни этого квадратного уравнения:

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2 \quad \text{или} \quad \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.$$

Так как уравнение $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2$ решений не имеет, то остается найти решения уравнения $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$:

$$2x-\frac{\pi}{6}=2\pi n\pm\frac{\pi}{3},\ n\in\mathbf{Z},$$

откуда

$$x=\pi n\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12},\ n\in\mathbf{Z}.$$

Следовательно, система (4) имеет бесконечное множество решений

$$x=\pi n\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12},\quad y=\frac{\pi}{6}-x=\frac{\pi}{12}\mp\frac{\pi}{6}-\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ. $\left\{\left(\frac{\pi}{12}\pm\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \ \frac{\pi}{12}\mp\frac{\pi}{6}-\pi n\right)\middle|\, n\in\mathbf{Z}\right\}$.

Пример 4*. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 9^{2\operatorname{tg}x+\cos y}=3 \\ 9^{\cos y}-81^{\operatorname{tg}x}=2. \end{cases}$$

Сделаем замену переменных. Обозначим

$$u=9^{\cos y},\quad v=81^{\operatorname{tg}x}. \qquad (8)$$

После этого заданная система примет вид

$$\begin{cases} uv=3 \\ u-v=2. \end{cases} \qquad (9)$$

Заметим, что по смыслу замены $u>0$ и $v>0$.

Систему (9) решаем с помощью подстановки $u=v+2$. После преобразований первое уравнение системы (9) принимает вид

$$v^2+2v-3=0.$$

Его корнями будут числа 1 и —3. Следовательно, система (9) имеет два решения: (3; 1) и (—1; —3). Учитывая, что $u>0$ и $v>0$,

отбрасываем решение (—1; —3). Остается подставить найденные значения u и v в формулы (8)

$$3 = 9^{\cos y},\ 1 = 81^{\operatorname{tg} x}$$

и решить полученные уравнения:

$$81^{\operatorname{tg} x} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$9^{\cos y} = 3 \Leftrightarrow \cos y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 2\pi m \pm \frac{\pi}{3},\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ. $\left\{\left(\pi n;\ 2\pi m \pm \frac{\pi}{3}\right) \middle| n, m \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

Пример 5*. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6 \\ \sqrt[6]{(x+y)^3 (x-y)^2} = 8. \end{cases} \quad (10)$$

Сделаем замену:

$$u = \sqrt{x+y},\ v = \sqrt[3]{x-y}. \quad (11)$$

Отметим, что $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$. В новых переменных система (10) принимает вид

$$\begin{cases} u + v = 6 \\ uv = 8. \end{cases} \quad (12)$$

Систему (12) решаем подстановкой $v = 6 - u$. После подстановки и преобразований второе уравнение системы (12) принимает вид

$$u^2 - 6u + 8 = 0.$$

Его корнями будут числа 4 и 2. Следовательно, система (12) имеет два решения: (4; 2) и (2; 4).

Подставляя значения $u = 4$ и $v = 2$ в (11), получаем:

$$\begin{Bmatrix} 4 = \sqrt{x+y} \\ 2 = \sqrt[3]{x-y} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 16 = x + y \\ 8 = x - y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 12 \\ y = 4 \end{Bmatrix}.$$

Подставляя в (11) значения $u = 2$, $v = 4$, имеем:

$$\begin{Bmatrix} 2 = \sqrt{x+y} \\ 4 = \sqrt[3]{x-y} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 4 = x + y \\ 64 = x - y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 34 \\ y = -30 \end{Bmatrix}.$$

Ответ. {(12; 4); (34; —30)}.

Упражнения

Решите систему уравнений:

860. $\begin{cases} (x + 0{,}2)^2 + (y + 0{,}3)^2 = 1 \\ x + y = 0{,}9. \end{cases}$

861. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$

862. $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{x} \\ y^2 - x - 5 = 0. \end{cases}$

863. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 5. \end{cases}$

864. $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 45 \\ x + y = 5. \end{cases}$

865. $\begin{cases} x^2y^3 = 16 \\ x^3y^2 = 2. \end{cases}$

866. $\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12 \\ x^2y^3 - x^3y^2 = 4. \end{cases}$

867. $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 1 \\ x + y = 3. \end{cases}$

868. $\begin{cases} 10^{1 + \lg (x + y)} = 50 \\ \lg (x - y) + \lg (x + y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$

869. $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \\ x + y - 20 = 0. \end{cases}$

870. $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81 \\ \lg (x + y)^2 - \lg x = 2 \lg 3. \end{cases}$

871. $\begin{cases} y - \log_3 x = 1 \\ x^y = 3^{12}. \end{cases}$

872. $\begin{cases} 3^{1 + 2 \log_3 (y - x)} = 48 \\ 2 \log_5 (2y - x - 12) - \\ - \log_5 (y - x) = \log_5 (y + x). \end{cases}$

873*. $\begin{cases} x - y = \dfrac{5\pi}{3} \\ \sin x = 2 \sin y. \end{cases}$

874*. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

875*. $\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}25 \\ \sin y \cos x = 0{,}75. \end{cases}$

876*. $\begin{cases} x - y = -\dfrac{1}{3} \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

877*. $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$

При решении системы введите предварительно новые переменные:

878. $\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 5 \\ x^{-2} + y^{-2} = 13. \end{cases}$

879. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x^3y^3 = -8. \end{cases}$

880. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ xy = 2. \end{cases}$

881. $\begin{cases} x^2 + y^4 = 5 \\ xy^2 = 2. \end{cases}$

882. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = \dfrac{4}{3} \\ xy = 9. \end{cases}$

883*. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ x + y = 28. \end{cases}$

884. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y} + \sqrt{x}\sqrt[3]{y} = 12 \\ xy = 64. \end{cases}$

885. $\begin{cases} 3^{2x} - 2^{y} = 725 \\ 3^{x} - 2^{\frac{y}{2}} = 25. \end{cases}$

886. $\begin{cases} x^2 - xy = 28 \\ y^2 - xy = -12. \end{cases}$

887*. $\begin{cases} 2^{\cos x} + 2^{\frac{1}{\cos y}} = 5 \\ 2^{\cos x + \frac{1}{\cos y}} = 4. \end{cases}$

§ 25.

СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

123. Системы неравенств

В восьмом классе уже рассматривались некоторые системы неравенств относительно двух переменных. Напомним, что *решением неравенства с двумя переменными*

$$f(x;\ y) > 0 \text{ (или } f(x;\ y) \geqslant 0)$$

называют *упорядоченную пару чисел* $(x;\ y)$, *после подстановки которых в неравенство получается истинное высказывание*. Коротко говорят, что пара чисел $(x;\ y)$ *удовлетворяет данному неравенству*.

Например, для неравенства

$$3\sin x + 3^y > 0$$

пара чисел $\left(\frac{\pi}{6};\ -2\right)$ является решением, так как

$$3\sin\frac{\pi}{6} + 3^{-2} = 3\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{9} > 0,$$

а пара $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ не является решением, так как

$$3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3^0 = 3\cdot(-1) + 1 = -2 < 0.$$

Решить неравенство — значит *найти множество решений этого неравенства*. Для неравенства с двумя переменными это множество есть некоторое подмножество в R^2. Его можно изобразить на координатной плоскости. Например, напомним, что множество решений линейного неравенства

$$ax + by + c \geqslant 0 \qquad (1)$$

или

$$ax + by + c > 0 \qquad (2)$$

есть полуплоскость (рис. 92). При этом граница полуплоскости принадлежит этому множеству, если неравенство нестрогое (см. неравенство (1)), и не принадлежит этому множеству, если неравенство строгое (см. неравенство (2)).

Множество решений неравенства

$$x^2 + y^2 \leqslant r^2$$

есть круг с центром в начале координат и радиусом r (при строгом неравенстве окружность не принадлежит этому множеству, а при

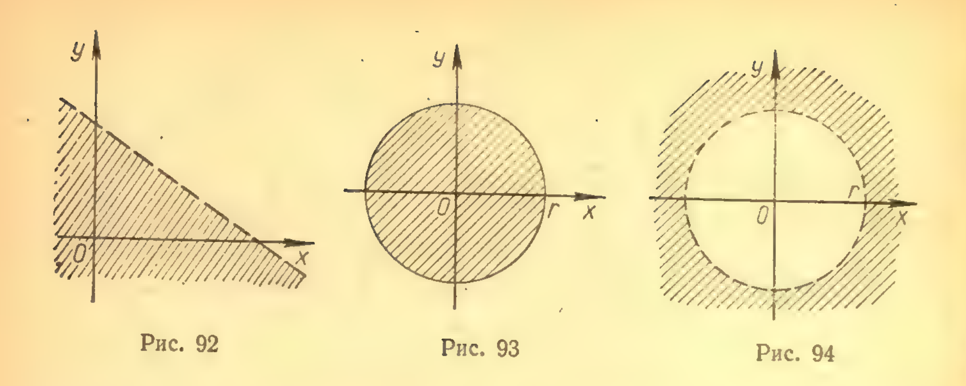


Рис. 92 Рис. 93 Рис. 94

нестрогом — принадлежит (рис. 93)). А множество решений неравенства

$$x^2 + y^2 > r^2$$

есть дополнение этого круга (рис. 94).

В общем случае изображение множества решений неравенства

$$f(x;\ y) > 0 \ (\text{или } f(x;\ y) \geqslant 0)$$

есть фигура на плоскости.

Например, множество решений неравенства

$$y + x^2 - 2x - 2 \leqslant 0$$

есть фигура на плоскости, граница которой является параболой

$$y = 2 + 2x - x^2$$

(рис. 95). Эта парабола разбивает всю плоскость на два множества — «внутренность параболы» (она заштрихована на рисунке) и «внешнюю область». Множество решений заданного неравенства заштриховано на рисунке 95. Действительно, возьмем любое число x_0. На вертикальной прямой $x = x_0$ лежит единственная точка границы — ее ордината $y_0 = 2x_0 - x_0^2 + 2$. Для всех точек этой

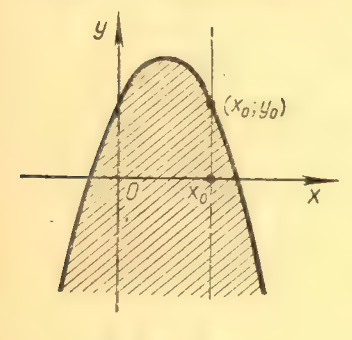


Рис. 95

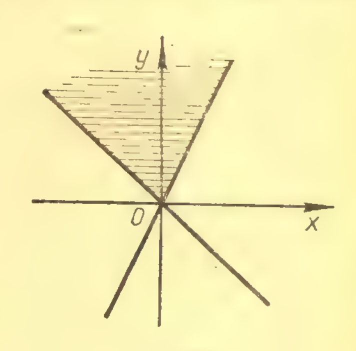


Рис. 96

вертикальной прямой, расположенных ниже точки $(x_0; y_0)$, будет $y < y_0$, т. е. эти точки принадлежат множеству решений заданного неравенства.

Если задана система неравенств

$$\begin{cases} f(x; y) > 0 \\ g(x; y) > 0, \end{cases}$$

то *решением* этой системы называется *упорядоченная пара чисел, удовлетворяющая каждому неравенству этой системы*. Поэтому множество решений системы есть пересечение множеств решений входящих в эту систему неравенств.

Например, для системы неравенств

$$\begin{cases} x + y \geqslant 0 \\ 2x - y \leqslant 0 \end{cases}$$

множество решений есть угол, заштрихованный на рисунке 96, — это пересечение двух полуплоскостей, каждая из которых есть множество решений одного из неравенств этой системы.

Пример 1. Найдем множество решений системы

$$\begin{cases} x - y + 1 \geqslant 0 \\ x + y - 3 \leqslant 0 \\ x + 3y + 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Множество решений каждого из неравенств этой системы есть полуплоскость (рис. 97, 98 и 99). А множество решений заданной системы есть пересечение этих полуплоскостей (рис. 100).

Пример 2. Найдем множество решений системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4 \\ 2x + 3y \geqslant 0. \end{cases}$$

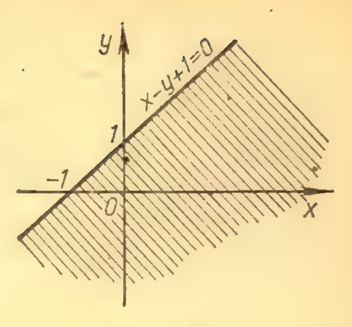


Рис. 97

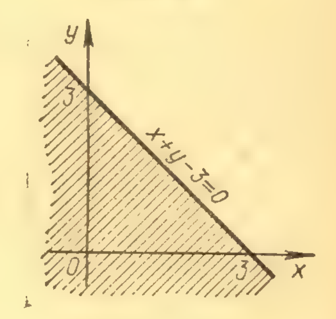


Рис. 98

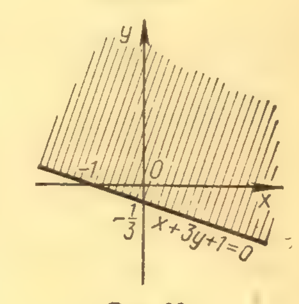


Рис. 99

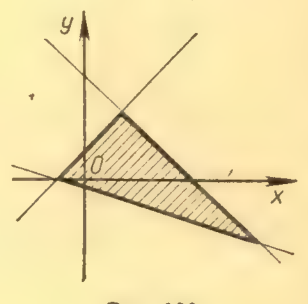


Рис. 100

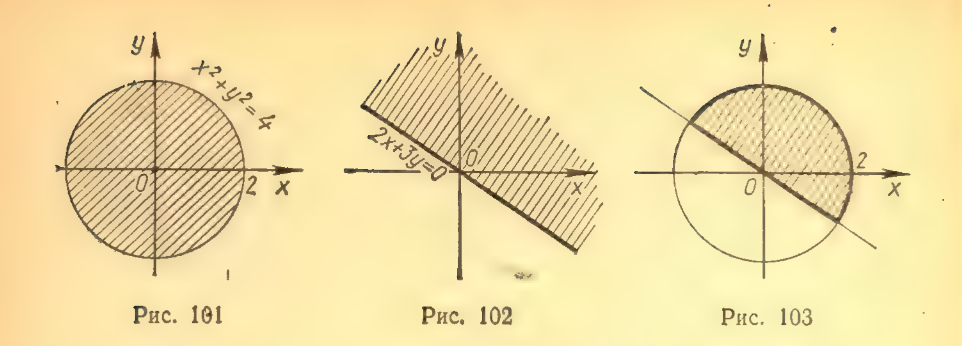


Рис. 101 Рис. 102 Рис. 103

Множество решений первого неравенства есть круг радиуса 2 с центром в начале координат (рис. 101). Множество решений второго неравенства есть полуплоскость (рис. 102). Множество решений системы есть пересечение полученных множеств, т. е. полукруг (рис. 103).

Пример 3. Найдем множество решений системы

$$\begin{cases} 3x - 2y - 1 \geqslant 0 \\ 3x - 2y + 3 \leqslant 0. \end{cases}$$

Множество решений неравенств системы есть полуплоскость (рис. 104 и 105). Границы этих полуплоскостей есть параллельные прямые (их угловые коэффициенты равны), в данном случае пересечение указанных полуплоскостей пусто — система несовместна.

Пример 4. Изобразим множество решений системы

$$\begin{cases} x + y - 1 \geqslant 0 \\ -x + y + 4 \geqslant 0 \\ 5x + 4y - 38 \leqslant 0 \\ 2x - y + 3 \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

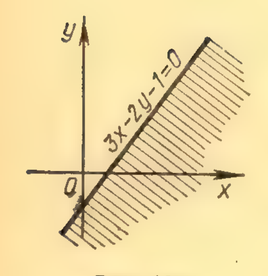


Рис. 104

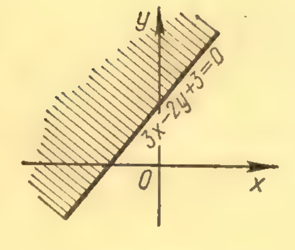


Рис. 105

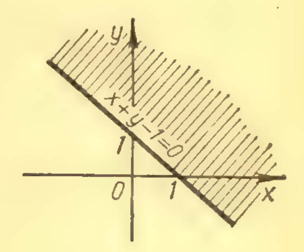


Рис. 106

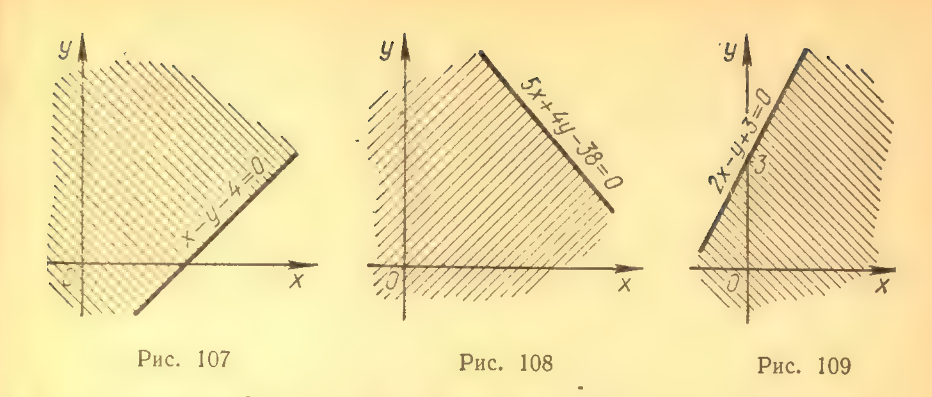


Рис. 107 Рис. 108 Рис. 109

На рисунках 106, 107, 108, 109, 110 и 111 заштрихованы полуплоскости, которые являются множествами решений для каждого неравенства системы. На рисунке 112 изображено пересечение этих полуплоскостей.

Упражнения

Найдите множество решений системы:

888. $\begin{cases} 2x - y - 1 \leqslant 0 \\ x + 2y + 2 \geqslant 0. \end{cases}$

889. $\begin{cases} 3x + 2y + 1 \geqslant 0 \\ 3x + 2y - 3 \leqslant 0. \end{cases}$

890. $\begin{cases} x - y + 2 \geqslant 0 \\ x - y - 1 \geqslant 0. \end{cases}$

891. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9 \\ x + y \geqslant 0. \end{cases}$

892. $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 4 \\ x - y - 2 \leqslant 0. \end{cases}$

893. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16 \\ x^2 + y^2 \geqslant 1. \end{cases}$

894. $\begin{cases} x^2 - y - 2 \leqslant 0 \\ x + y \leqslant 0. \end{cases}$

895. $\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 \leqslant 0 \\ 2x - y - 2 \geqslant 0. \end{cases}$

896. $\begin{cases} x^2 + y \leqslant 0 \\ 2x^2 + y - 1 \leqslant 0. \end{cases}$

897. $\begin{cases} x^2 + y - 1 \leqslant 0 \\ x^2 - 2x - y - 3 \leqslant 0. \end{cases}$

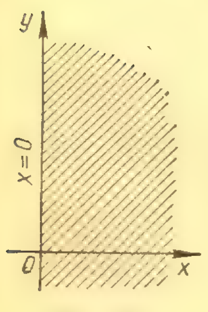


Рис. 110

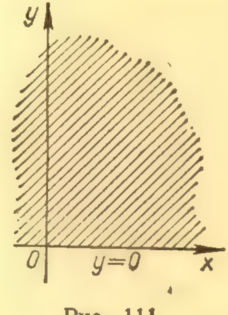


Рис. 111

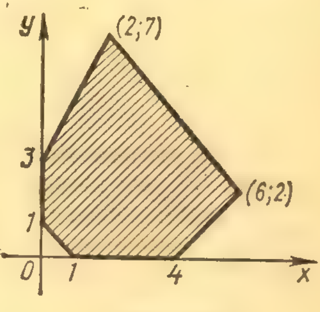


Рис. 112

898. $\begin{cases} x + 2y \geqslant 0 \\ x - y \leqslant 0 \\ x - 4y + 6 \geqslant 0. \end{cases}$

899. $\begin{cases} 2x - y - 1 \leqslant 0 \\ x - y + 1 \geqslant 0 \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

900. $\begin{cases} 3x + 2y - 1 \leqslant 0 \\ x + 1 \geqslant 0 \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

901. $\begin{cases} x + y \geqslant 0 \\ 2x - y - 3 \leqslant 0 \\ x - 2y \leqslant 0. \end{cases}$

902. $\begin{cases} x + y \leqslant 0 \\ 3x - y + 12 \geqslant 0 \\ y \leqslant 0. \end{cases}$

903. $\begin{cases} x + y + 2 \geqslant 0 \\ x - y + 2 \geqslant 0 \\ x - y - 1 \leqslant 0. \end{cases}$

124*. Понятие о линейном программировании

Многие практические задачи сводятся к системам неравенств относительно нескольких переменных. В качестве примера можно указать задачи, связанные с планированием производства. Обычно такие задачи формулируются так: *найти наилучший план производства при заданных ресурсах*. Последние обычно задаются при помощи ряда неравенств. В итоге приходится искать наибольшее или наименьшее значение некоторой функции в области, которая задается системой неравенств.

Приведем простейшую задачу подобного типа.

З а д а ч а. Бетон, производимый на заводах A и B, надо развезти по строительным площадкам № 1, № 2 и № 3. Завод A производит 320 *т* бетона в сутки, а завод B — 380 *т*. Потребность в бетоне за сутки на стройплощадке № 1 — 200 *т*, на стройплощадке № 2 — 280 *т* и на стройплощадке № 3 — 220 *т*. Стоимость перевозки одной тонны бетона с завода на стройплощадку дается следующей таблицей:

Таблица 1

с. пл. / заводы	№ 1	№ 2	№ 3
A	2	4	6
B	4	5	3

Требуется составить план перевозок бетона, при котором стоимость перевозок будет наименьшей.

Обозначим через x (*т*) количество бетона, перевозимого с завода A на стройплощадку № 1, а через y (*т*) — количество бетона, перевозимого с завода A на стройплощадку № 2. Так как стройплощадке № 1 требуется 200 *т* бетона в сутки, то с завода B на стройплощадку № 1 надо завезти $200 - x$ (*т*) бетона. А на строй-

площадку № 2 с завода B надо завезти $280 - y$ (т) бетона в сутки. Оставшиеся на заводе A $320 - x - y$ (т) бетона перевозятся на стройплощадку № 3. Чтобы эта стройплощадка была полностью обеспечена бетоном, с завода B надо завезти недостающие $220 - (320 - x - y) = x + y - 100$ (т) бетона.

Таким образом, план перевозок задается следующей таблицей:

Таблица 2

	№ 1	№ 2	№ 3
A	x	y	$320 - x - y$
B	$200 - x$	$280 - y$	$x + y - 100$

Чтобы получить стоимость запланированных перевозок, надо умножить каждое число из этой таблицы на соответствующее число таблицы 1 (там указана стоимость такой перевозки тонны бетона) и сложить полученные произведения. Получится выражение:

$$S(x; y) = 2x + 4y + 6(320 - x - y) + \\ + 4(200 - x) + 5(280 - y) + 3(x + y - 100) = \\ = 3820 - 5x - 4y. \quad (1)$$

По условию задачи надо так подобрать переменные x и y, чтобы это выражение было наименьшим. При этом надо учитывать, что переменные x и y не могут принимать произвольных значений. Так, масса перевозимого бетона не может быть отрицательной. Следовательно, все числа в таблице 2 неотрицательны:

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 320 - x - y \geqslant 0,\\ 200 - x \geqslant 0,\ 280 - y \geqslant 0,\\ x + y - 100 \geqslant 0. \quad (2)$$

Таким образом, наименьшее значение функции $S(x; y)$ надо искать в области, определенной неравенствами (2). Эта область изображена на рисунке 113. Наименьшее (и наибольшее) значение функция $S(x; y)$ принимает в одной из вершин этого многоугольника в силу линейности этой функции.

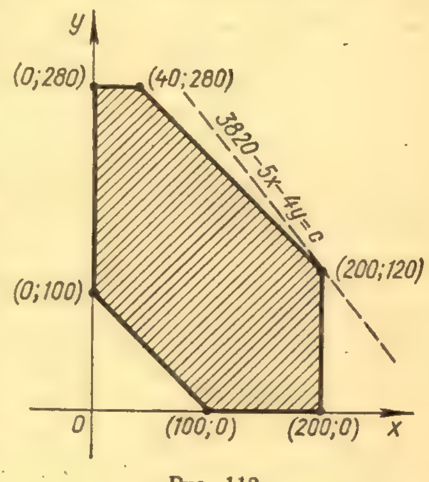


Рис. 113

Действительно, функция $S(x; y)$ принимает значение, равное c, для всех пар $(x; y)$ таких, что $3820 - 5x - 4y = c$. На координатной плоскости точки с этими координатами располагаются на прямой с уравнением $3820 - 5x - 4y = c$. При различных c получаем различные прямые, но все они параллельны, так как их угловые коэффициенты равны $-1,25$. Если при некотором значении c такая прямая проходит через внутреннюю точку многоугольника, то, немного уменьшив c, мы получим параллельную прямую, которая тоже проходит через внутреннюю точку многоугольника (если значение c изменено достаточно мало). Поэтому такое значение c не может быть ни наибольшим, ни наименьшим значением функции $3820 - 5x - 4y$. Если же прямая пересекается с многоугольником только по границе, то существуют как угодно малые изменения c, при которых у новой прямой и многоугольника уже не будет общих точек. Такое положение прямой показано на рисунке 113 пунктиром. Соответствующее значение c будет или наименьшим, или наибольшим значением функции $3820 - 5x - 4y$. В самом деле, если при значении c_1 прямая имеет общую точку $(x_1; y_1)$ с многоугольником, а, например, при любом $c > c_1$ уже не имеет, то c_1 есть наибольшее значение рассматриваемой функции на этом многоугольнике и оно принимается в этой общей точке $(x_1; y_1)$.

Подставляя в функцию $S(x; y)$ координаты вершин многоугольника (указанные на рис. 113), получаем:

$S(0; 100) = 3420$, $S(100; 0) = 3320$, $S(200; 0) = 2820$,
$S(200; 120) = 2340$, $S(40; 280) = 2500$, $S(0; 280) = 2700$.

Наименьшее из этих значений 2340 принимается функцией $S(x; y)$ в вершине (200; 120). Следовательно, затраты на перевозку бетона будут наименьшими при $x = 200$ и $y = 120$. При этих значениях переменных x и y таблица 2 принимает вид:

	№ 1	№ 2	№ 3
A	200	120	0
B	0	160	220

При такой схеме перевозок затраты на них будут наименьшими и равны 2340. При любых других вариантах перевозок затраты будут больше.

Многие задачи при своем решении допускают подобную схему. Она заключается в том, что надо найти наибольшее или наименьшее значение для линейной функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$S = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n$$

в некоторой области, которая задается системой неравенств

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{nj}x_n \leqslant c_j;\ 1 \leqslant j \leqslant m$$

и линейных уравнений

$$\alpha_{1k}x_1 + \alpha_{2k}x_2 + \ldots + \alpha_{nk}x_n = \gamma_k;\ 1 \leqslant k \leqslant s.$$

Задачи такого типа называются *задачами линейного программирования.*

Задачи линейного программирования сводятся, как это видно из приведенного примера, к решению систем линейных неравенств и уравнений. В тех случаях, когда система содержит два уравнения с двумя переменными или три уравнения с тремя переменными, человек может проводить вычисления «вручную», т. е. самостоятельно, без специальных приборов, выписывать решение на бумаге. Но если такие системы приходится решать часто и помногу — лучше работу механизировать, применять вычислительные машины.

Механические вычислительные машины до сих пор употребляются в различных вычислительных отделах, центрах и на счетных фабриках. Однако появление большого числа более сложных вычислительных задач, в частности задач, сводящихся к системам линейных уравнений и неравенств со многими переменными, вызывает непреодолимые трудности у вычислителей-математиков. Только появление электронных вычислительных машин (коротко пишут: ЭВМ) дало возможность ставить вопрос о решении огромного числа вычислительных задач, в том числе и задач, сводящихся к решению систем линейных уравнений и неравенств. При этом само решение, например, систем линейных уравнений теоретически не представляет трудности. Ее, как и в разобранных случаях, методом Гаусса сводят к треугольной форме и последовательно находят значения одной переменной за другой. Конечно, большое число переменных и уравнений способствовало разработке очень четких и результативных методов решения. Потребовалось уметь решения задач записывать в таком виде, чтобы весь ход решения можно было передавать машине. При таких условиях решение задач, на которые вычислители потратили бы большое время (например, месяцы или даже годы), машина выполняет за небольшое число часов, а то и минут. Кроме того, из-за возможности производить быстро огромные вычисления стало реально решение таких задач, которые ранее считались невыполнимыми.

Автоматизация счета на ЭВМ предоставила возможности решать не только вычислительные задачи. Оказалось, что многие задачи логического, стратегического, диагностического и игрового порядка также решаются с помощью ЭВМ. Например, ЭВМ играют в шахматы, переводят с одного языка на другой, распознают зашифрованные записи, в том числе старинные письменности и т. п.

Умение составлять план решения задачи (алгоритм) для передачи в машину, запись этого алгоритма на одном из языков программирования становится элементом культуры многих работников из разных областей. В нашей стране непрерывно растет парк ЭВМ, требуется все больше специалистов, умеющих ставить и решать прикладные народнохозяйственные задачи в виде, пригодном для перевода на язык ЭВМ. Электронно-вычислительные машины занимают важное место в решении задач научно-технической революции, задач наших пятилетних планов.

904*. На животноводческой ферме производится откорм скота. Пусть известно, что каждому животному надо ежедневно выдать не менее 6 единиц вещества A, 8 единиц вещества B и 12 единиц вещества C (этими веществами могут быть, например, белки, жиры и углеводы). Для откорма животных можно закупить два вида кормов (например, жмых и комбикорм). Единица веса первого корма содержит 21 единицу вещества A, 2 единицы вещества B и 4 единицы вещества C, а стоимость ее равна 3 рублям. Для второго вида кормов соответствующие цифры равны 3; 2; 2 и 2 рублям. Требуется составить рацион, при котором была бы обеспечена суточная потребность в веществах A, B и C, причем стоимость его была бы наименьшей.

905*. На фабрике для производства двух видов продукции используются три вида сырья. Оно имеется на фабрике в следующих количествах: 13 единиц вида A, 9 единиц вида B и 8 единиц вида C. На производство первого вида продукции надо израсходовать (2; 0; 2) единиц указанных видов сырья, а для второго вида продукции эти показатели равны (2; 3; 0) (нуль означает, что данное сырье не требуется для производства данного вида продукции). Прибыль, получаемая фабрикой от реализации первого вида продукции, равна 3 условным единицам, а от реализации единицы продукции второго вида равна 4 таким же единицам. Требуется спланировать работу фабрики так, чтобы обеспечить наибольшую прибыль.

125*. Сведения из истории

Геометрическая интерпретация уравнения с двумя переменными была введена создателем *аналитической геометрии* Р. Декартом (1596—1650).

Линейные системы уравнений со многими переменными впервые детально изучал Г. В. Лейбниц (1646—1716). Общие формулы для решения систем линейных уравнений с n переменными нашел швейцарский математик Г. Крамер в 1750 году. К сожалению, по Крамеру при этом приходится вычислять сумму из $n!$ членов. Более практические методы решения линейных систем предложил К. Ф. Гаусс (1777—1855). По методу Гаусса вычислители могли за день работы решить систему с десятью переменными, но решение систем из нескольких сот линейных уравнений, встречающихся в геодезии, занимало иногда много месяцев работы нескольких вычислителей. Только с появлением ЭВМ решение больших линейных систем стало вполне доступным.

Изучение систем линейных неравенств получило мощный стимул начиная с 30-х годов текущего столетия с созданием линейного программирования.

Практический интерес имеют, главным образом, задачи линейного программирования, в которых число переменных много больше двух. Для того чтобы правильно ориентироваться в этих задачах, существенно владеть геометрической интерпретацией линейных уравнений с n переменными в «n-мерном пространстве» $\boldsymbol{R}^n$.

Создание методов линейного программирования составляет существенную часть работ советского математика Л. В. Канторовича.

Дополнительные упражнения к главе IX

Найдите множество решений системы:

906. $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{y}{3} = 3. \end{cases}$

907. $\begin{cases} y^2 + xy = 15 \\ x^2 + xy = 10. \end{cases}$

908. $\begin{cases} \sqrt[4]{x + y} - \sqrt[4]{x - y} = 2 \\ \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = 8. \end{cases}$

909. $\begin{cases} x + y + \dfrac{x}{y} = 9 \\ \dfrac{(x + y)\,x}{y} = 20. \end{cases}$

910. $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ xy + (x + y) = 5. \end{cases}$

911. $\begin{cases} (x + y)\,3^{y-x} = \dfrac{5}{27} \\ 3\log_5 (x + y) = x - y. \end{cases}$

912. $\begin{cases} x^{2y^2-1} = 5 \\ x^{y^2+2} = 125. \end{cases}$

913. $\begin{cases} 12\,(x + y)^2 + x = 2,5 - y \\ 6\,(x - y)^2 + x = 0,125 + y. \end{cases}$

914. $\begin{cases} x + y + 1 \geqslant 0 \\ x + y - 3 \leqslant 0 \\ x + 1 \geqslant 0 \\ x - 3 \leqslant 0. \end{cases}$

915. $\begin{cases} x - y + 2 \geqslant 0 \\ x - y - 1 \leqslant 0 \\ y + 1 \geqslant 0 \\ y - 3 \leqslant 0. \end{cases}$

916. $\begin{cases} x + 2y + 2 \geqslant 0 \\ x + 2y - 4 \leqslant 0 \\ x - 2 \leqslant 0 \\ x + y + 1 \geqslant 0. \end{cases}$

917. $\begin{cases} 3x - 2y + 6 \geqslant 0 \\ 3x - 2y \leqslant 0 \\ 2y - 9 \leqslant 0 \\ x + y + 2 \geqslant 0. \end{cases}$

918. $\begin{cases} x - y + 2 \geqslant 0 \\ 3x - y - 4 \leqslant 0 \\ x + 1 \geqslant 0 \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

919. $\begin{cases} x - 2y + 1 \geqslant 0 \\ 3x + y - 11 \leqslant 0 \\ x + 4y \geqslant 0 \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

920. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9 \\ x + y \geqslant 0 \\ x - 2y \leqslant 0. \end{cases}$

921. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9 \\ x + 1 \geqslant 0 \\ x - 2 \leqslant 0. \end{cases}$

922. $\begin{cases} xy - 4 \leqslant 0 \\ x + 3 \geqslant 0 \\ y + 4 \geqslant 0. \end{cases}$

923. $\begin{cases} xy + 6 \leqslant 0 \\ x - 2y + 8 \geqslant 0. \end{cases}$

6 Заказ 273

МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1°. **Представление рациональных чисел в виде бесконечных десятичных дробей.** Любое рациональное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби

$$a_0,\ a_1a_2a_3\ \ldots,$$

где a_0 — целое число, а целые числа a_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) лежат в пределах

$$0 \leqslant a_k \leqslant 9.$$

Пример 1. $\frac{1}{3} = 0{,}3333333\ldots$; $1\frac{3}{4} = 1{,}750000\ \ldots$.

Бесконечная десятичная дробь

$$a_0,a_1a_2\ \ldots\ a_n\ldots$$

называется *периодической*, если существуют такие натуральные числа N и p, что

$$a_{n+p} = a_n \text{ для всех натуральных } n \geqslant N.$$

Пример 2. Дробь 67,555555... периодическая ($N = 1$, $p = 1$).

Пример 3. Дробь $\bar{3}{,}6134134134134\ldots$ периодическая ($N = 2$, $p = 3$).

Периодические дроби принято записывать короче: вместо 67,555555... пишут 67, (5), вместо $\bar{3}{,}6134134134134\ldots$ пишут $\bar{3}{,}6(134)$. Число, написанное в скобках, называют периодом. $\bar{3}{,}6\ (134)$ читают: «три с минусом, шесть десятых и сто тридцать четыре в периоде».

Пример 4. Бесконечная десятичная дробь 0,3750000000... имеет периодом число 0.

Пример 5. Бесконечная десятичная дробь 4,235757575757... имеет периодом число 57, ее записывают в виде 4,23(57).

Общий способ представления рационального числа в виде бесконечной десятичной дроби состоит в следующем:

1) выделяют целую часть a_0 числа x;

2) дробную часть числа x, т. е. $x - a_0 = \frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}_0$, $n \in \boldsymbol{N}$, превращают в десятичную дробь при помощи алгоритма деления; в нужных случаях разложение дополняют справа бесконечной последовательностью нулей.

Пример 6. $-17\frac{2}{7} = -18 + \frac{5}{7} = -18 + 0{,}7142857142857... = \overline{18}{,}7142857142857...$.

В результате получается периодическая десятичная дробь.

В самом деле, при делении на натуральное число n возможно только n различных остатков

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Поэтому при обращении рационального числа со знаменателем n в бесконечную десятичную дробь какой-либо из остатков встретится дважды после не более чем n шагов алгоритма деления. С этого момента будут повторяться цифры в частном.

Любая периодическая дробь

$$a_0{,}a_1a_2\ldots a_n\ldots,$$

не имеющая периодом (9), является представлением какого-либо рационального числа.

Для отыскания такого числа можно применить формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии с $|q| < 1$.

Пример 7. Дробь 0,(27) есть сумма прогрессии

$$\frac{27}{10^2} + \frac{27}{10^4} + \frac{27}{10^6} + \ldots .$$

Таким образом, нужно найти сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом 0,27 и знаменателем 0,01. Поэтому

$$0{,}(27) = \frac{27}{10^2} + \frac{27}{10^4} + \frac{27}{10^6} + \ldots = \frac{27}{100} : (1 - 0{,}01) = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}.$$

Пример 8. Представим в виде бесконечной периодическую дробь $\overline{2}{,}6(037)$.

$$\overline{2}{,}6(037) = -2 + \frac{6}{10} + \frac{37}{10^4} + \frac{37}{10^7} + \ldots = -1\frac{4}{10} + \frac{37}{10000} : \left(1 - \frac{1}{1000}\right) = -1\frac{4}{10} + \frac{37}{9990} = -1\frac{4}{10} + \frac{1}{270} = -1\frac{107}{270}.$$

Периодические дроби, имеющие периодом (9), можно было бы считать другой записью чисел, имеющих периодом (0):

$$0{,}499999\ldots = 0{,}500000\ldots .$$

2°. Иррациональные числа. Любую непериодическую бесконечную дробь считают представлением некоторого иррационального числа. Объединение множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел есть множество действительных чисел. Ниже приводятся примеры иррациональных чисел.

Пример 9. Бесконечная десятичная дробь

$$0{,}1010010001000001\ldots$$

(после первой единицы — один нуль, после второй — два нуля, ... после k-й — k нулей и т. д.) является записью некоторого иррационального числа.

Действительно, предположим, что эта дробь периодическая. Тогда период (пусть он состоит из p цифр) должен содержать хотя бы одну единицу, поэтому в записи числа между двумя единицами не может стоять больше чем $p - 1$ нулей, что противоречит условию. Полученное противоречие показывает, что данная дробь непериодическая и, следовательно, служит представлением некоторого иррационального числа.

Пример 10. Число $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ иррационально.

В самом деле, предположим, что $\sqrt{2}$ — число рациональное, тогда его можно представить в виде несократимой обыкновенной дроби $\frac{p}{q}$, где $p \in \boldsymbol{Z}$, $q \in \boldsymbol{N}$. Из равенства $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ имеем: $p^2 = 2q^2$, поэтому p^2, а следовательно, и p четно, т. е. представимо в виде $p = 2k$. Подставляя $2k$ вместо p, получаем:

$$4k^2 = 2q^2, \text{ или } 2k^2 = q^2.$$

Следовательно, и q — четное число, поэтому дробь $\frac{p}{q}$ сократима (на два), что противоречит предположению о несократимости дроби. Этим доказано, что $\sqrt{2}$ не есть рациональное число, значит, оно иррационально.

Пример 11. Число $\lg 2 \approx 0{,}3010$ иррационально.

Предположим противное. Так как $\lg 2 > 0$, то его можно представить в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа. Из равенства

$\lg 2 = \frac{p}{q}$ получаем $10^{\frac{p}{q}} = 2$, или $10^p = 2^q$.

Левая часть равенства $10^p = 2^q$ делится на 5, правая — не делится, следовательно, это равенство ложно. Из полученного противоречия следует, что $\lg 2$ — иррациональное число.

3°. Правила сравнения действительных чисел и арифметические операции на множестве действительных чисел. Будем рассматривать десятичные дроби, не имеющие (9) периодом.

Действительное число $\alpha = a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$ больше действительного числа $\beta = b_0, b_1b_2\ldots b_n\ldots$, если существует такое k, что $a_k > b_k$ и $a_i = b_i$ при всех $i < k$.

Пример 12. $1,23\ldots > 1,21, \ldots$, так как $a_0 = b_0 = 1$, $a_1 = b_1 = 2$ и $a_2 > b_2$ $(3 > 1)$.

Пример 13. $\overline{23},476\ldots < 4,67\ldots$, так как $a_0 < b_0$ $(-23 < 4)$.

Пример 14. $\overline{2},1748 > \overline{2},1739$.

Для действительного числа $x = a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$ вводятся десятичные приближения по недостатку и по избытку с точностью до 10^{-n}:

по недостатку: $x_n = a_0, a_1a_2\ldots a_n$;

по избытку: $x'_n = x_n + 10^{-n}$.

Пример 15. Для числа 4,725496... первые шесть приближений выписаны в следующей таблице:

$4 \leqslant x < 5$	(с точностью до 1),
$4,7 \leqslant x < 4,8$	(с точностью до 0,1),
$4,72 \leqslant x < 4,73$	(с точностью до 0,01),
$4,725 \leqslant x < 4,726$	(с точностью до 0,001),
$4,7254 \leqslant x < 4,7255$	(с точностью до 0,0001),
$4,72549 \leqslant x < 4,72550$	(с точностью до 0,00001).

Суммой действительных чисел x и y называется такое действительное число z, которое при любом натуральном n удовлетворяет неравенству

$$x_n + y_n \leqslant z < x'_n + y'_n.$$

Произведением двух неотрицательных действительных чисел x и y называется такое действительное число z, которое при любом натуральном n удовлетворяет неравенству

$$x_n \cdot y_n \leqslant z < x'_n \cdot y'_n.$$

Если одно или оба числа отрицательны, то нужно перемножить их абсолютные величины. *Произведение положительно, если оба множителя одинаковых знаков, и отрицательно, если — противоположных знаков.*

Можно доказать, что для любых действительных чисел их сумма и произведение *существуют и определены однозначно.*

Пример 16. Пусть

$$x = \overline{2},7154\ldots,\ y = 1,4287\ldots\ .$$

Тогда $x_4 + y_4 = 0,1441 \leqslant x + y < x_4' + y_4' = 0,1443$. Таким образом, мы определили первые три знака после запятой для суммы $x + y$:

$$x + y = 0,144\ldots\ .$$

Вычитание определяется как действие, обратное сложению, деление — как действие, обратное умножению.

4°. Основные законы арифметических действий и свойства неравенств. Для любых действительных чисел a, b, c имеют место следующие равенства:

а) $a + b = b + a$ (переместительный закон сложения);

б) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (сочетательный закон сложения);

в) $a \cdot b = b \cdot a$ (переместительный закон умножения);

г) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (сочетательный закон умножения);

д) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (распределительный закон).

Отметим, что для вычитания и деления аналогичные свойства следуют из определения этих действий, например:

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c.$$

Из любых двух разных действительных чисел одно больше другого: правила сравнения приведены в 3°. Если число a больше числа b ($a > b$), то говорят также, что b меньше a ($b < a$).

Перечислим основные свойства неравенств:

а) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$, где a, b и c — любые действительные числа.

Пусть $a > b$ (a и b — любые действительные числа), тогда верны следующие неравенства:

б) $a + c > b + c$, где c — любое действительное число;

в) $a \cdot c > b \cdot c$, где c — любое положительное действительное число;

г) $a \cdot c < b \cdot c$, где c — любое отрицательное действительное число.

Из приведенных выше свойств числовых неравенств можно получить следующие следствия:

Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$ и $a - d < b - c$ (теоремы о почленном сложении и вычитании верных числовых неравенств).

Пусть a, b, c, d — произвольные положительные числа и $a < b$ и $c < d$. Тогда $a \cdot c < b \cdot d$ и $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$ (теоремы о почленном умножении и делении неравенств с положительными членами).

5°. Подмножества множества действительных чисел. Между множеством натуральных чисел

$$\boldsymbol{N} = \{1; 2; 3; \dots\},$$

множеством целых неотрицательных чисел

$$\boldsymbol{Z}_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\},$$

множеством целых чисел

$$\boldsymbol{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\},$$

множеством рациональных чисел

$$\boldsymbol{Q} = \left\{\frac{m}{n} \middle| m \in \boldsymbol{Z}; n \in \boldsymbol{N}\right\}$$

и множеством действительных чисел $\boldsymbol{R}$ существуют следующие соотношения:

$$N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R.$$

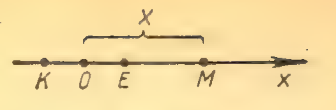


Рис. 114

6°. **Изображение чисел точками координатной прямой.** На произвольной прямой l выберем две точки O и E. Точка O разбивает l на два луча. При выбранной единице измерения расстояние между любыми двумя точками выражается неотрицательным действительным числом. Выберем в качестве единицы измерения длину отрезка OE: $|OE| = 1$. Напомним одну из аксиом курса геометрии: для любого расстояния x на заданном луче с началом O существует единственная точка M, находящаяся на расстоянии x от точки O. Таким образом, между точками луча OE и неотрицательными действительными числами существует взаимно однозначное соответствие $M \to x_M$, где $x_M = |OM|$ — координата точки M (рис. 114). Для точек луча OK координатой служит число $x_M = -|OM|$. Луч OE называют положительным лучом, луч OK — отрицательным лучом. Отображение $M \to x_M$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между прямой и множеством действительных чисел.

Для любых двух точек A и B прямой l имеем:

$$|AB| = |x_A - x_B|.$$

Множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел часто называют числовой прямой, а его элементы (числа) — точками числовой прямой.

7°. **Координатная плоскость.** На плоскости возьмем две взаимно перпендикулярные координатные прямые с общим началом координат O и конгруэнтными единичными отрезками. Одну из координатных прямых (обычно ее рисуют горизонтально, а направление вправо считают положительным) называют осью абсцисс (рис. 115) или Ox. Вторую координатную прямую (обычно ее рисуют вертикально, а направление вверх считают положительным) называют осью ординат или Oy. Между точками плоскости и упорядоченными парами чисел устанавливают взаимно однозначное соответствие $A \to (x; y)$ следующим образом. Из точки A опускают перпендикуляр на ось Ox. Основание этого перпендикуляра имеет координату. Ее обозначают через x и называют абсциссой точки A. Из точки A опускают второй перпендикуляр, на ось Oy. Основание этого перпендикуляра имеет координату. Ее обозначают через y и называют ординатой точки A. Полученную таким образом упорядоченную пару чисел $(x; y)$, где x —

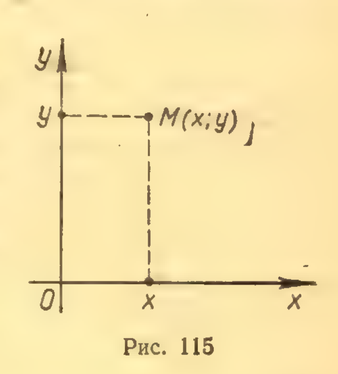


Рис. 115

на первом месте, а y — на втором, называют координатами точки A и пишут: $A = M\ (x;\ y)$.

Множество упорядоченных пар действительных чисел называют числовой плоскостью и обозначают через $\boldsymbol{R}^2$, а любую упорядоченную пару действительных чисел — точкой числовой плоскости.

2. Функция

1^0. *Числовой функцией* f называется отображение подмножества D множества $\boldsymbol{R}$ на подмножество E множества $\boldsymbol{R}$. Множество D называют *областью определения*, а множество E — *множеством значений*.

Область определения функции f обозначают через $D\ (f)$, а множество значений функции — через $E\ (f)$. Значение функции f в точке x обозначают $f\ (x)$.

Например, если функция f отображает действительное число x в число x^2:

$$x \to x^2,$$

то

$$D\ (f) = \boldsymbol{R}, E\ (f) = \boldsymbol{R}_0 = [0;\ \infty[.$$

Для этой функции

$$f\ (2) = f\ (-2) = 4,\ f\ (y) = y^2,\ f\ (z^2) = z^4\ \dots .$$

Часто для обозначения числа из $D\ (f)$ выбирают определенную букву, называемую *независимой переменной* или *аргументом*. Обычно это буква x. Условившись в этом, вместо того чтобы говорить «функция f, заданная формулой $f\ (x) = x^2$», можно говорить «функция $f\ (x) = x^2$», или просто «функция x^2».

Для обозначения соответствующего значения функции также выбирают определенную букву, чаще всего букву y. Сделав этот выбор, можно говорить «функция $y = x^2$».

Однако надо помнить, что равенства $f\ (x) = x^2$, $f\ (y) = y^2$, $f\ (z) = z^2, \dots$ определяют одну и ту же функцию f.

Каждому значению независимой переменной x из области определения $D\ (f)$ функции f соответствует определенное значение $y = f\ (x)$ зависимой переменной y из множества значений $E\ (f)$ функции f.

Пример 1. Для функции $y = 2\sqrt{1 - x^2}$ областью определения является подмножество $D = [-1;\ 1]$ множества действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

Множеством значений функции является множество $E = [0;\ 2]$.

Пример 2. Для функции $y = x^3$ имеем:

$$D\ (y) =]-\infty;\ \infty[,\ E\ (y) =]-\infty;\ \infty[.$$

Пример 3. Для функции синус $D\ (\sin) =]-\infty;\ \infty[$, $E\ (\sin) = [-1;\ 1]$.

Пример 4. $D(\mathrm{tg}) = \bigcup\limits_{n \in \boldsymbol{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right[$, $E\ (\mathrm{tg}) =]-\infty;\ \infty[$.

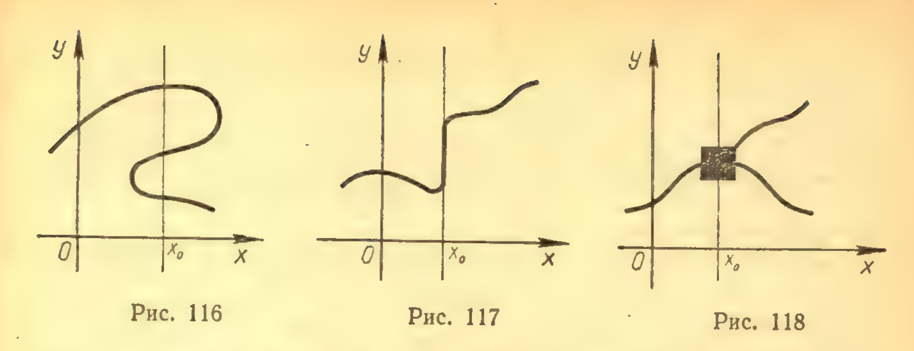


Рис. 116 Рис. 117 Рис. 118

2⁰. *Графиком функции f* называется множество точек $(x; y)$ на координатной плоскости, где $y = f(x)$, а x пробегает все множество $D(f)$. Не всякое множество точек плоскости является графиком некоторой функции. Для того чтобы множество Γ точек на плоскости было графиком некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы любая прямая, параллельная оси ординат, пересекалась с Γ не более чем в одной точке. Так, множества Γ, изображенные на рисунках 116—118, не являются графиками функций, так как с прямой $x = x_0$ они имеют более одной точки пересечения. А множества Γ, изображенные на рисунках 119—121, являются графиками функций, так как с каждой прямой, параллельной оси ординат, каждое из них или не пересекается (прямая $x = x_1$), или имеет только одну общую точку (прямая $x = x_2$). При помощи этого множества Γ установлено соответствие, показанное на рисунке 122 стрелками.

3⁰. Пусть задана функция $y = f(x)$, т. е. некоторое соответствие между множествами $D(f)$ и $E(f)$. Если обратное соответствие есть функция, то ее называют *функцией, обратной функции f*. Если функция g является обратной по отношению к функции f, то функция f является обратной по отношению к функции g. Функции f и g называют взаимно обратными. Для взаимно обратных функций f и g имеют место следующие равенства:

$$D(f) = E(g);\ f(g(x)) = x,\ x \in D(g);$$
$$E(f) = D(g);\ g(f(x)) = x,\ x \in D(f).$$

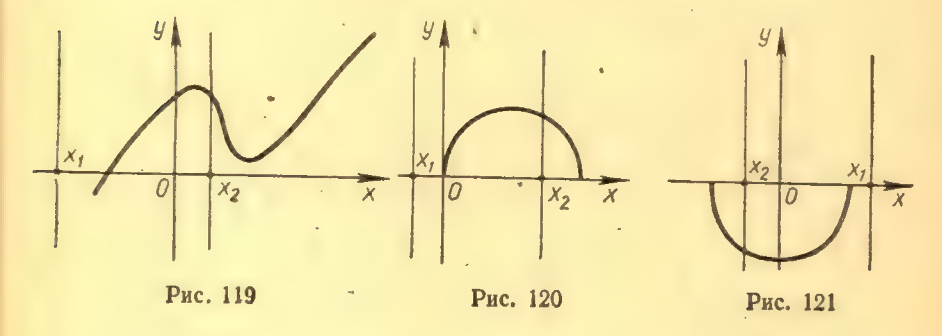


Рис. 119 Рис. 120 Рис. 121

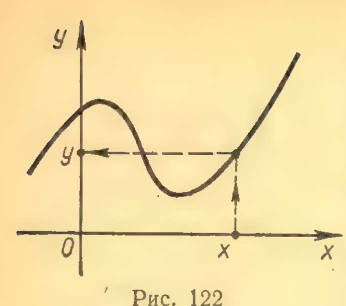


Рис. 122

Функцию, которая имеет обратную, называют *обратимой*, а функцию, которая не имеет обратной, — *необратимой*. ***Функция является обратимой тогда и только тогда, когда каждое свое значение она принимает только один раз.***

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. Если функция возрастающая (убывающая), то она имеет обратную и обратная функция также возрастающая (убывающая). Примеры изображены на рисунках 123 и 124. Функция, обратная нечетной, — нечетная (рис. 125). Четная функция не имеет обратной (см. ниже, пример 6).

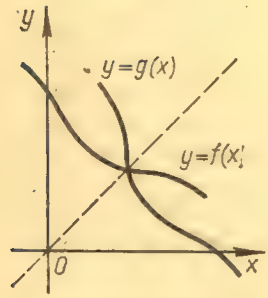


Рис. 123

П р и м е р 5. Пусть $y = 2x + 1$, тогда обратная ей функция будет $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Графики этих функций изображены на рисунке 126.

П р и м е р 6. Пусть $y = x^2$. Ее графиком является парабола (рис. 127). Эта функция необратима, так как любое положительное значение a функция принимает два раза: в точках $x = \sqrt{a}$ и $x = -\sqrt{a}$, а не один раз.

Для превращения необратимой функции в обратимую выбирают такой промежуток ее области определения, на котором функция возрастает (убывает)

Рис. 124

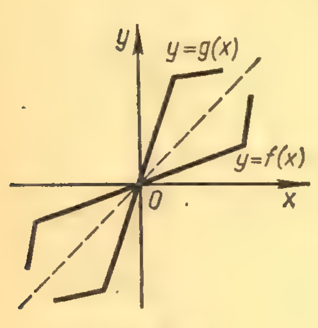


Рис. 125

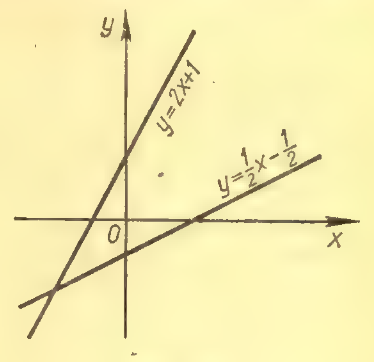


Рис. 126

и принимает все значения (причем только один раз).

В данном случае лучше всего взять промежуток $R_0 = [0; \infty[$ (рис. 128). Обратной функцией будет функция $y = \sqrt{x}$.

Пример 7. Рассмотрим функцию $y = x^4$. Сузим область определения $]-\infty; \infty[$ функции до луча $]-\infty; 0]$. Функция $y = x^4$ станет обратимой. Обратной функцией будет функция $y = -\sqrt[4]{x}$. Графики взаимно обратных функций $y = x^4$, определенной на $]-\infty; 0]$, и функции $y = -\sqrt[4]{x}$ изображены на рисунке 129.

Пример 8. Рассмотрим функцию $y = \sin x$. При этом $D(\sin) =]-\infty; \infty[$, $E(\sin) = [-1; 1]$. Эта функция необратима. Например, значение $\frac{1}{2}$ функция $y = \sin x$ принимает бесконечное число раз в точках $-\frac{7\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ и т. д.

Заметим, что любая периодическая функция необратима (объясните почему).

Сузим область определения функции $y = \sin x$ до отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функция $y = \sin x$, определенная на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, будет обратимой (рис. 130).

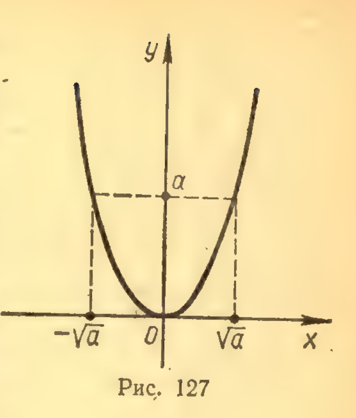


Рис. 127



Рис. 128

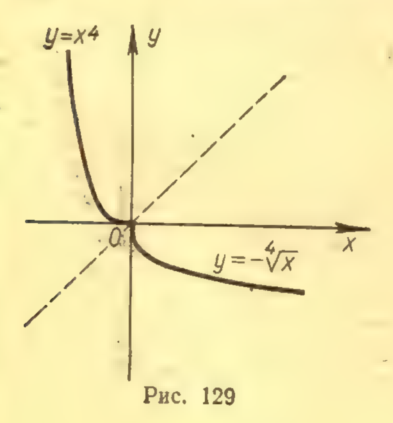


Рис. 129

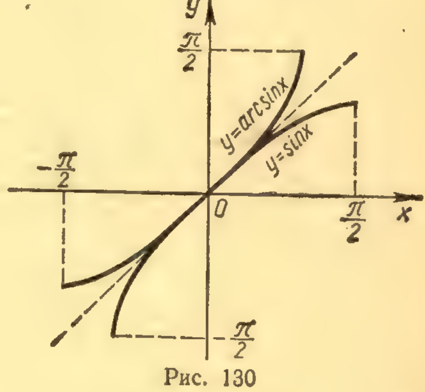


Рис. 130

На этом отрезке функция возрастает и принимает все значения из отрезка $[-1; 1]$, равного множеству значений функции синус.

Обратная ей функция называется арксинусом (arcsin) (см. п. 85).

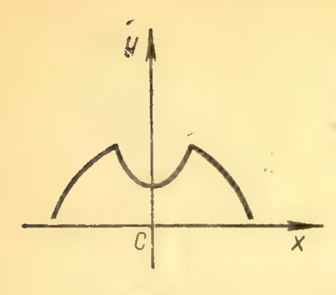


Рис. 131

3. Четные функции. Нечетные функции

Числовая функция f называется *четной*, если область ее определения симметрична относительно точки O (т. е. для каждой точки $x \in D(f)$ точка $-x \in D(f)$) и для любого x из области определения верно равенство $f(x) = f(-x)$ (рис. 131).

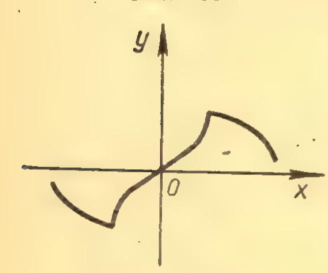


Рис. 132

Числовая функция называется *нечетной*, если область ее определения симметрична относительно точки O и для любого x из области определения верно равенство $f(x) = -f(-x)$ (рис. 132).

Пример 1. Функция $y = x^4$ четная, так как область ее определения $\boldsymbol{R}$ симметрична относительно O и $y(-x) = (-x)^4 = x^4 = y(x)$ для любого x (рис. 133).

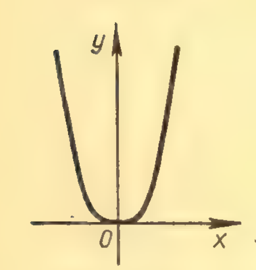


Рис. 133

Пример 2. Функция $y = x^5$ нечетная, так как область ее определения $\boldsymbol{R}$ симметрична относительно O и $y(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -y(x)$ (рис. 134).

Из определений вытекает, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат, т. е. центрально симметричен.

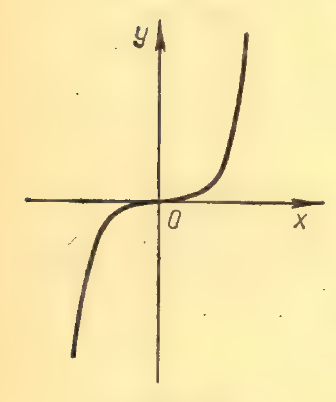


Рис. 134

Пример 3. Функция $y = \frac{x^3 + x}{x^3 - x}$ четная, так как $D(y) =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]1; \infty[$ симметрична относительно начала координат и для всех $x \in D(y)$ (рис. 135) $y(x) = y(-x)$.

Пример 4. Функция $f(x) = x + \frac{1}{x}$ нечетная (рис. 136).

Пример 5. Произведение двух нечетных функций f и g есть четная функция, область ее определения симметрич-

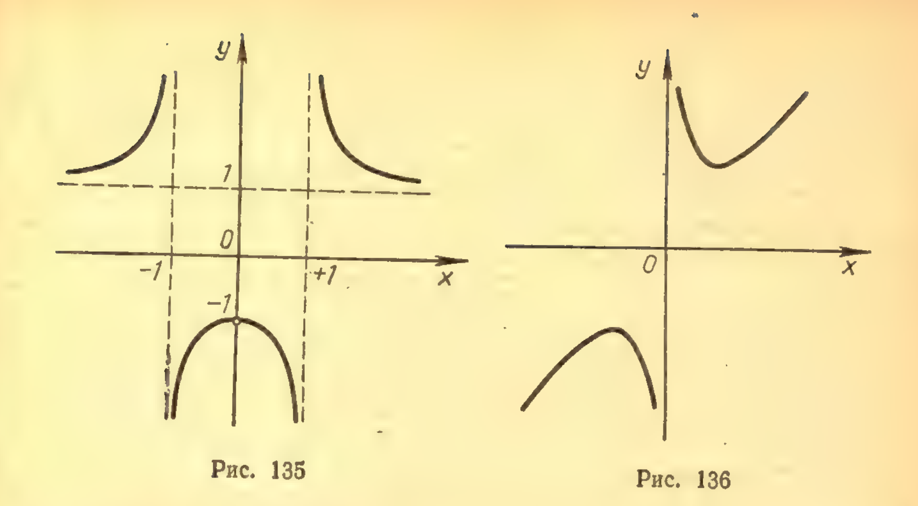


Рис. 135 Рис. 136

на относительно O (область определения симметрична как пересечение симметричных относительно O областей определения функций f и g) и $f(-x)\,g(-x) = (-f(x))\,(-g(x)) = f(x)\,g(x)$.

Если f и g — нечетные функции, то их сумма и разность — нечетные функции, а частное и произведение — четные функции.

Пример 6. Из основных тригонометрических функций нечетными являются синус, тангенс и котангенс; функция косинус четная.

Пример 7. Функция $y = \frac{x^2 + x}{x + 1}$ не является ни четной, ни нечетной, так как область ее определения не симметрична относительно точки $x = 0$.

4. Периодические функции

Функция f называется *периодической* с периодом T ($T \neq 0$ — некоторое действительное число) (рис. 137), если:

1) для любого x из области определения $D(f)$ функции f точки $x + T$ и $x - T$ также принадлежат $D(f)$;

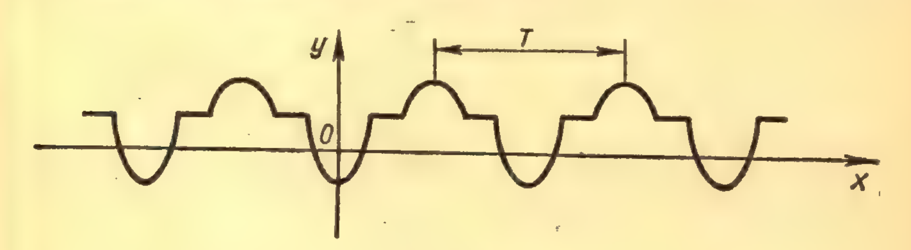


Рис. 137

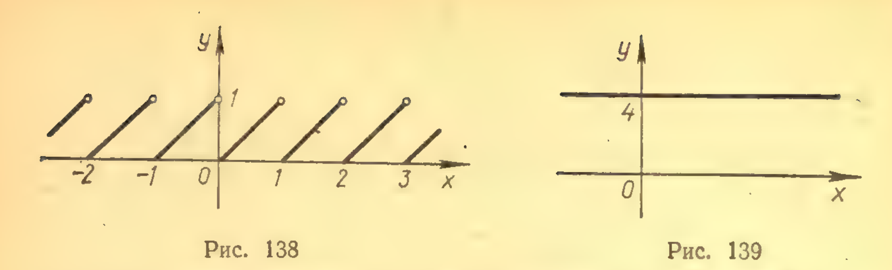


Рис. 138 Рис. 139

2) для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(x) = f(x + T)$.

Напомним, что для периодической функции f с периодом T для любого $x \in D(f)$ истинно также равенство $f(x - T) = f(x)$.

Пример 1. Функция $y = \{x\}$ периодическая с наименьшим периодом 1 (рис. 138), так как область определения этой функции $]-\infty; \infty[$ и $\{x + 1\} = \{x\}$ для любого $x \in \mathbf{R}$.

Пример 2. Функция $y = 4$ (рис. 139) периодическая, в качестве периода этой функции можно взять любое действительное число.

Обычно под периодом функции понимают наименьший из положительных периодов, если такой период существует. В этом случае все периоды функции кратны наименьшему периоду, т. е. $T = kT_0$ (T_0 — наименьший период, k — любое целое число). Однако бывают функции, которые не имеют наименьшего периода.

Пример 3. Функция Дирихле, равная 0 для рациональных x и 1 для иррациональных x:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — рационально,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — иррационально,} \end{cases} \text{—}$$

периодическая и не имеет наименьшего положительного периода, так как любое рациональное число — период этой функции. Это следует из того, что сумма двух рациональных чисел — рациональное число, а сумма рационального и иррационального чисел — иррациональное число.

Пример 4. Синус и косинус — периодические функции с периодом 2π, тангенс и котангенс — периодические с периодом π.

Сумма, разность, произведение и частное функций с периодом T также являются функциями с периодом T.

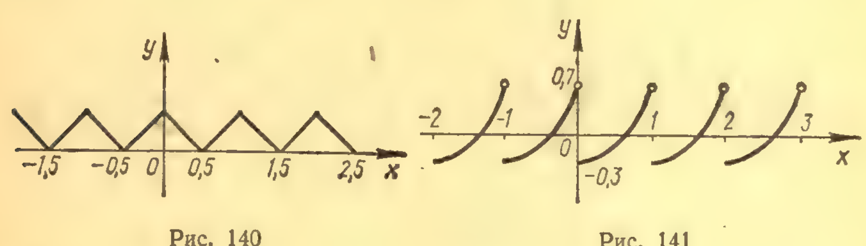


Рис. 140 Рис. 141

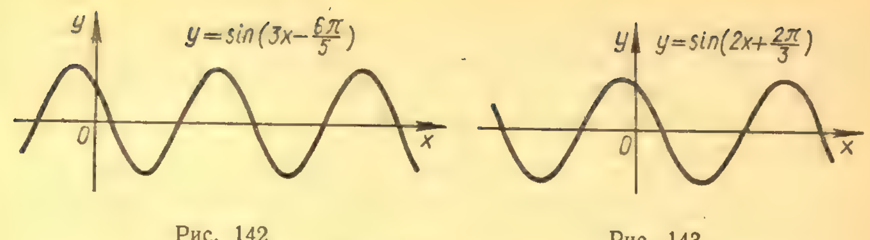


Рис. 142 Рис. 143

Пример 5. Любая сложная функция $h(x) = f(g(x))$, где «внутренняя» функция g периодическая, — также периодическая с тем же периодом.

В самом деле, $h(x + T) = f(g(x + T)) = f(g(x)) = h(x)$. Кроме того, если $x \in D(h)$, то $x \in D(g)$ и $g(x) \in D(f)$. Но тогда $x + T \in D(g)$, $x - T \in D(g)$ и $g(x + T) = g(x - T) = g(x)$ принадлежат $D(f)$.

В частности, периодическими являются функции $f(x) = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$ (рис. 140), $g(x) = \{x\}^2 - 0{,}3$ (рис. 141).

Если функция $y = f(x)$ периодическая с периодом T, то функция $g(x) = f(Ax + B)$ периодическая с периодом $T_1 = \frac{T}{A}$.

В самом деле, $g(x + T_1) = f(A(x + T_1) + B) = f(Ax + AT_1 + B) = f(Ax + T + B) = f(Ax + B) = g(x)$. Далее, $x \in D(g) \Leftrightarrow Ax + B \in D(f)$, но тогда $Ax + B \pm T \in D(f)$, т. е. $A(x \pm T_1) + B \in D(f) \Leftrightarrow x \pm T_1 \in D(g)$.

Пример 6. Функции $\sin(\omega t + b)$ и $\cos(\omega t + b)$ периодические с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$. Соответствующие примеры для разных ω и b изображены на рисунках 142—144.

Если T — период функции f, то $-T$, $2T$ (и вообще kT для любого целого числа k) — периоды функции.

5. Общая схема исследования функции

Чтобы провести исследование функции, находят: 1) область ее определения; 2) ее производную; 3) критические точки; 4) промежутки возрастания (убывания); 5) экстремумы, после чего строят ее график. При построении графика учитывают четность, нечетность и периодичность функции. Для некоторых функций полезно найти

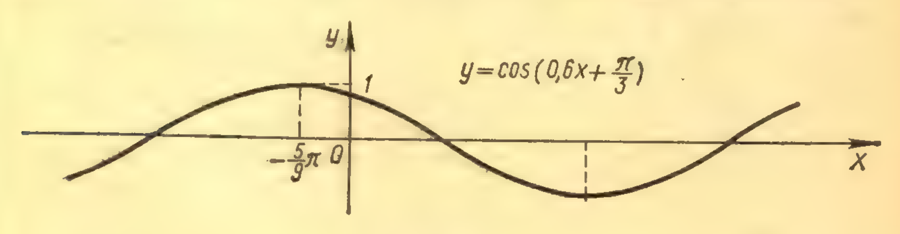


Рис. 144

корни уравнения $f(x) = 0$. Результаты исследования на возрастание, убывание и экстремум функции удобно записывать в таблице.

Пример. Исследуем функцию $f(x) = -2 + 3x - x^3$.

1. $D(f) = \boldsymbol{R}$, так как f — многочлен.
2. $f'(x) = 3 - 3x^2$.
3. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1,\ \ x_2 = -1$.
4. Функция f возрастает в промежутках, для всех точек которых $f'(x) > 0$.

$$3 - 3x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in]-1;\ 1[.$$

Функция f убывает в промежутках, в которых $f'(x) < 0$:

$3 - 3x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty;\ -1[$ или $x \in]1;\ \infty[$.

5. Так как слева от точки -1 функция убывает, а справа возрастает, то в точке -1 она достигает минимума.

В точке 1 производная функции f меняет знак с «+» на «—», поэтому в точке 1 функция f достигает максимума.

Составим таблицу:

x	$]-\infty;\ -1[$	-1	$]-1;\ 1[$	1	$]1;\ \infty[$
$f'(x)$	—	0	+	0	—
$f(x)$	↘	-4	↗	0	↘
		min		max	

Функция f не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

Найдем корни уравнения $f(x) = 0$:

$$-2+3x - x^3 = -2 + 2x+x - x^3 =$$
$$= -2(1 - x) + x(1 - x)(1 + x) =$$
$$= (1 - x)(-2 + x + x^2) =$$
$$= (1 - x)(x - 1)(x + 2),$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2,\ f(0) = -2.$$

Строим график (рис. 145).

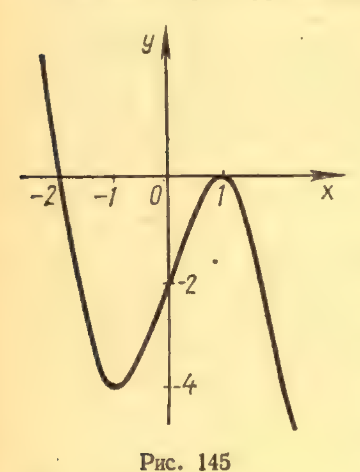


Рис. 145

6. Прямая пропорциональность

Переменную y называют *прямо пропорциональной* переменной x, с *коэффициентом пропорциональности* k, если соответственные значения этих переменных связаны соотношением $y = kx$, где k — некоторое действительное число, отличное от нуля.

Для любых двух пар соответственных значений переменных x и y — $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ (x_1, y_1, x_2, y_2 отличны от нуля) верно равенство

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Пример 1. Путь, пройденный телом при движении по прямой с постоянной скоростью, прямо пропорционален времени движения.

Пример 2. Пусть переменная y пропорциональна переменной x с коэффициентом k_1, а переменная z пропорциональна переменной y с коэффициентом k_2. Тогда переменная z пропорциональна переменной x с коэффициентом k_1k_2.

В самом деле, $z = k_2y = k_2k_1x$.

Если считать x независимой переменной, а y зависимой, то формула $y = kx$ определяет y как функцию x. Графиком этой функции является прямая, проходящая через начало координат с угловым коэффициентом k (тангенс угла наклона к оси Ox равен k).

Докажем это. Проведем прямую через точки $O = M(0; 0)$ и $P = M(1; k)$ (рис. 146 и рис. 147). Пусть E и D — проекции точки P на координатные оси. Тогда $|OE| = 1$ и $|OD| = |k|$.

Мы должны проверить, что: 1) любая точка прямой OP принадлежит графику прямой пропорциональности и 2) любая точка графика, заданная прямой пропорциональностью, является точкой прямой OP.

1) Возьмем любую точку $Q = M(x; y)$ прямой OP. Пусть F и G — проекции Q на оси Ox и Oy. Тогда $F = M(x; 0)$; $G = M(0; y)$ и $|OF| = |x|$; $|OG| = |y|$. Из подобия треугольников ODP и OGQ получаем:

$$\frac{|DP|}{|DO|} = \frac{|GQ|}{|GO|}, \text{ т. е. } \frac{1}{|k|} = \frac{|x|}{|y|}, \text{ откуда } |y| = |k| \cdot |x|.$$

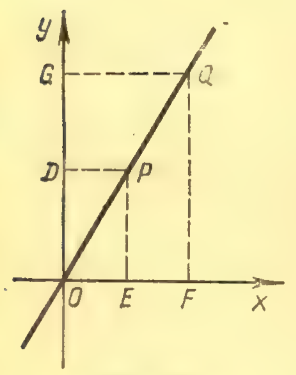


Рис. 146

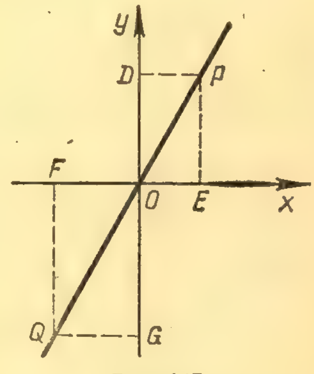


Рис. 147

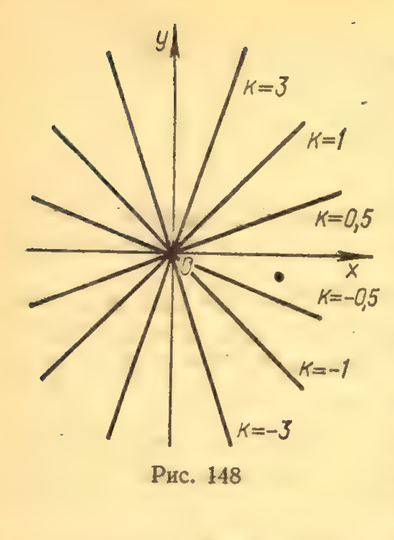


Рис. 148

Отметим также, что при $k > 0$ положительным x соответствуют положительные y, а отрицательным x — отрицательные y. Итак, $y = kx$ для точек прямой OP. Аналогично $y = kx$ и при $k < 0$.

2) Каждому числу x формула $y = kx$ ставит в соответствие одно и только одно значение y. Поэтому достаточно доказать, что для каждого x существует точка прямой OP с абсциссой x.

Проведем из точки с координатами $(x; 0)$ прямую, параллельную оси Oy. Искомая точка — точка пересечения этой прямой с прямой OP.

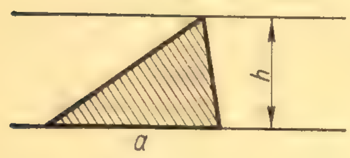


Рис. 149

П р и м е р 3. На рисунке 148 изображены графики функций $y = kx$ при разных k ($k = \pm 0{,}5$; ± 3; ± 1).

П р и м е р 4. Так как площадь треугольника равна $0{,}5a \cdot h$, то для треугольников, у которых две вершины лежат на одной из параллельных прямых, а третья на другой из этих прямых (рис. 149), площадь прямо пропорциональна длине основания с коэффициентом пропорциональности $k = 0{,}5h$ (h — расстояние между этими прямыми). Это следует из формулы $S = 0{,}5ha$. Длина основания треугольника — положительная величина, поэтому график данной зависимости — открытый луч (рис. 150).

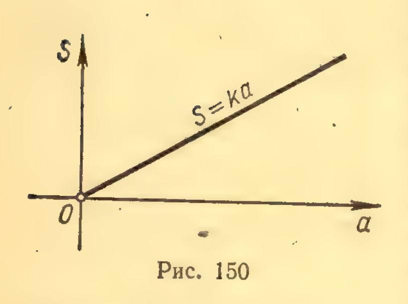


Рис. 150

П р и м е р 5. Площадь S сектора $(S = \frac{1}{2}R^2\alpha)$ окружности радиуса R прямо пропорциональна радианной мере α его дуги с коэффициентом пропорциональности $k = \frac{1}{2}R^2$ (где R — радиус сектора). Графиком данной зависимости служит отрезок с концами $(0; 0)$ и $(2\pi; \pi R^2)$ (рис. 151).

П р и м е р 6. Кинетическая энергия $\frac{mv^2}{2}$ материальной точки массы m прямо пропорциональна v^2 (квадрату скорости точки) с $k = 0{,}5\,m$.

Пример 7. Объем прямого кругового конуса прямо пропорционален произведению квадрата радиуса основания на высоту с $k = \frac{1}{3}$.

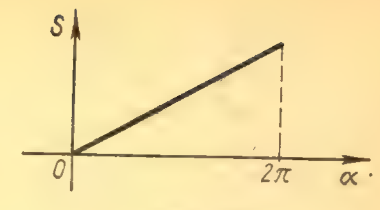


Рис. 151

Если переменная y пропорциональна переменной x с коэффициентом пропорциональности k, то переменная x пропорциональна переменной y с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

7. Обратная пропорциональность

Переменную y называют *обратно пропорциональной* переменной x, если соответственные значения этих переменных связаны равенством $y = \frac{k}{x}$, где k — некоторое действительное число, отличное от нуля. Число k называют *коэффициентом обратной пропорциональности*.

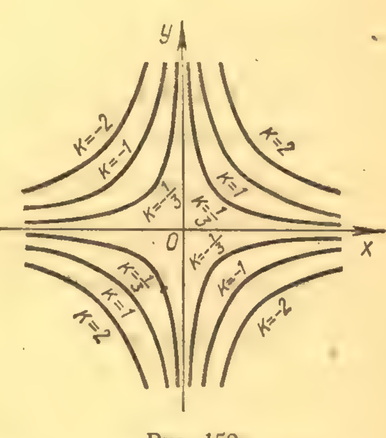


Рис. 152

Отметим, что ни одна из переменных x и y не может принимать значения 0.

Для любых двух пар соответственных значений x и y — $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ верно равенство

$$\frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1},$$

так как $y_1x_1 = y_2x_2 = k$.

Пример 1. При равномерном движении по прямой время, затрачиваемое телом на прохождение заданного пути, обратно пропорционально скорости движения.

Если переменная y обратно пропорциональна переменной x с коэффициентом обратной пропорциональности k, то переменная x обратно пропорциональна переменной y с тем же коэффициентом обратной пропорциональности.

Если считать x независимой переменной, а y — зависимой, то формула $y = \frac{k}{x}$ определяет y как функцию x. Графиком этой функции является кривая, состоящая из двух ветвей. График функции $y = \frac{k}{x}$ называется гиперболой.

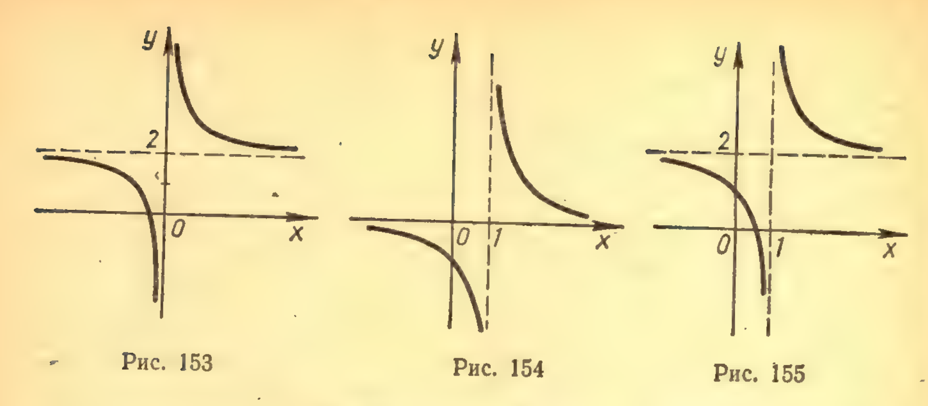


Рис. 153 Рис. 154 Рис. 155

Пример 2. На рисунке 152 изображены графики функций $y = \frac{k}{x}$ при разных k $\left(k = \pm 1; \pm 2; \pm \frac{1}{3}\right)$.

Отметим также, что гиперболой называют любую кривую, получающуюся из графика функции $y = \frac{k}{x}$ при помощи перемещений и сжатий к осям.

Пример 3. Графики функций $y = \frac{1}{x} + 2$ (рис. 153); $y = \frac{1}{x-1}$ (рис. 154); $y = \frac{1}{x-1} + 2$ (рис. 155) являются гиперболами, так как получаются из графика функции $y = \frac{1}{x}$ параллельным переносом (укажите координаты этого вектора).

Пример 4. Кривая $x^2 - y^2 = 1$ является гиперболой, так как она есть образ графика функции $y = \frac{0,5}{x}$ при повороте на $-45°$ (объясните почему) (рис. 156).

График функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ расположен в I и III координатных углах (рис. 157), а при $k < 0$ во II и IV координатных углах (рис. 158).

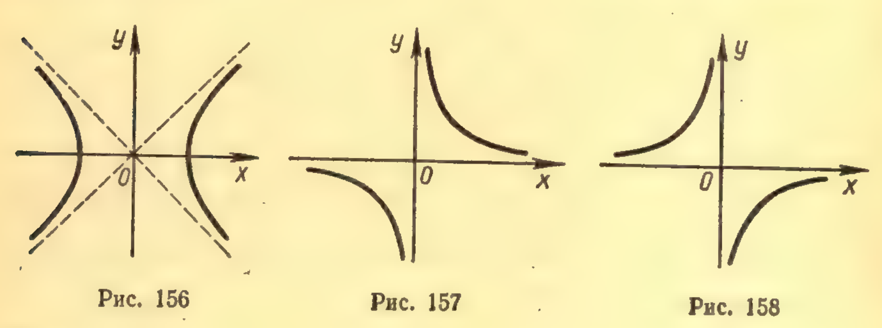


Рис. 156 Рис. 157 Рис. 158

Так как функция $y = \frac{k}{x}$ нечетна, то ее график симметричен относительно начала координат.

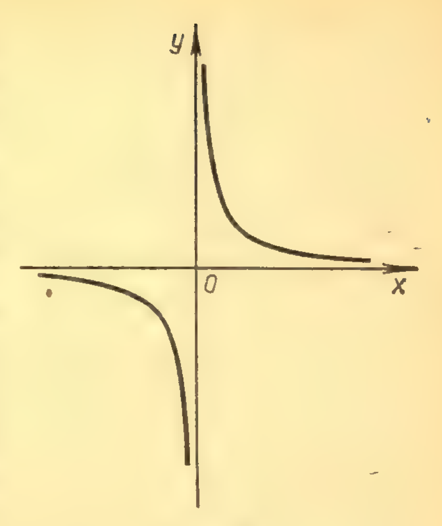


Рис. 159

Функция $y = \frac{k}{x}$ непрерывна на полупрямых $]-\infty; 0[$ и $]0; \infty[$. В точке $x = 0$ эта функция не определена.

Производная функции $y = \frac{k}{x}$ равна $-\frac{k}{x^2}$. Так как эта производная нигде не обращается в нуль и определена в каждой точке области определения функции, эта функция не имеет критических точек.

Поскольку $y' > 0$ при $k < 0$, то при $k < 0$ функция возрастает в промежутках $]-\infty; 0[$ и $]0; \infty[$.

При $k > 0$ $y' < 0$, поэтому функция y убывает в промежутках $]-\infty; 0[$ и $]0; \infty[$.

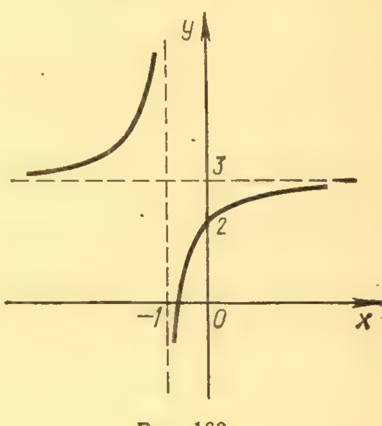


Рис. 160

Пример 5. Функция $y = \frac{2}{x}$ убывает в промежутках $]-\infty; 0[$, $]0; \infty[$ (рис. 159), а функция $y = 3 - \frac{1}{x+1}$ возрастает в промежутках $]-\infty; -1[$ и $]-1; \infty[$ (рис. 160).

8. Линейная функция

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа.

Область определения линейной функции — вся числовая прямая R. Множество значений при $k \neq 0$ — также вся числовая прямая R. При $k = 0$ множество значений состоит из одной точки b.

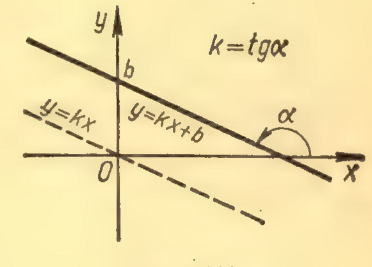


Рис. 161

Линейная функция $f(x)=kx+b$ дифференцируема на всей числовой прямой: ее производная в каждой точке равна k.

При $k>0$ функция возрастает на $]-\infty; \infty[$, так как $f'(x)=k>0$.

При $k=0$ функция постоянная.

При $k<0$ функция убывает на $]-\infty; \infty[$ (так как $f'(x)=k<0$ при всех x).

При $k=0$ каждая точка является критической точкой функции, так как в каждой точке производная равна нулю; при $k \neq 0$ критических точек нет.

Линейная функция не имеет экстремумов ни при каких значениях k и b.

Графиком линейной функции служит прямая с угловым коэффициентом k. При $k \neq 0$ эта прямая есть образ при параллельном переносе $\vec{r}(0; b)$ графика прямой пропорциональности $y=kx$ (рис. 161).

Если известно, что $y=kx+b$, то говорят, что переменная y линейно зависит от переменной x.

На рисунках 162—164 изображены графики линейных функций при различных k и b (рис. 162 при $k=1{,}5$ и $b=\pm 1, \pm 0{,}6, \pm 3$. Рис. 163 при $k=0{,}6$ и $b=-1, 0, 1, 2{,}5$. Рис. 164 при $k=-2$ и $b=-1$, $k=-0{,}5$ и $b=4$).

Если переменная y линейно зависит от переменной x, а переменная z линейно зависит от переменной y, то переменная z линейно зависит от переменной x.

В самом деле, $z=k_2y+b_2=k_2(k_1x+b_1)+b_2=k_1k_2x+(k_2b_1+b_2)$.

Прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1=k_2$ (см. рис. 165).

Отметим, что необходимым и достаточным условием перпендикулярности этих прямых является соотношение $k_1k_2=-1$ (объясните почему, рис. 166).

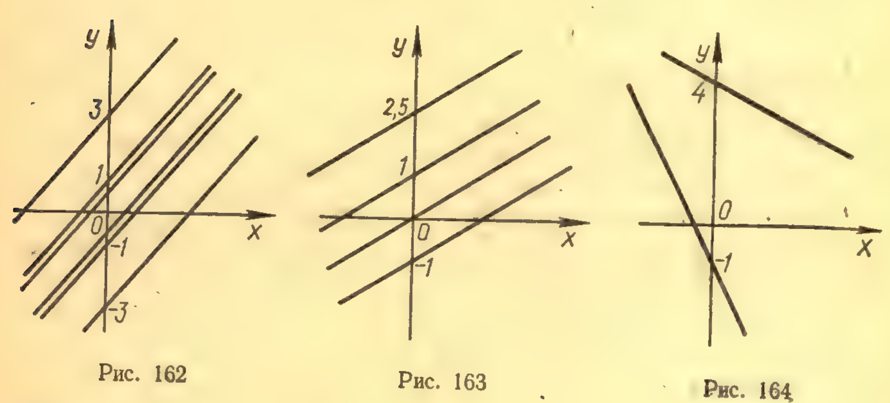


Рис. 162   Рис. 163   Рис. 164

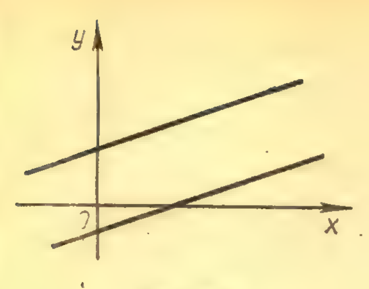


Рис. 165

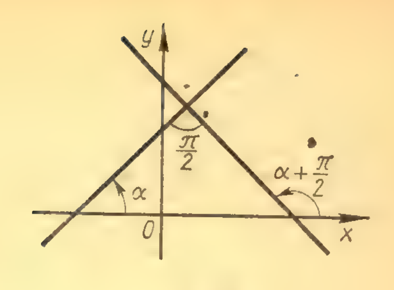


Рис. 166

Пример 1. Прямые с одним и тем же коэффициентом b проходят через одну точку M (0; b) (см. рис. 167).

Пример 2. Любая прямая, не параллельная оси ординат, служит графиком некоторой линейной функции (см. рис. 161). Коэффициент b равен ординате точки пересечения этой прямой с осью ординат, коэффициент k — тангенсу угла между прямой и осью Ox. Если $M_1=M(x_1; y_1)$ и $M_2 = M(x_2; y_2)$ — две точки прямой, то $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (рис. 168). При этом x_1 можно взять равным нулю, тогда y_1 равно b.

Часто рассматривают соответствия, задаваемые уравнениями $ax+by+c=0$, где a и b не равны нулю одновременно (a, b, c — действительные числа). Графиком этого уравнения при $b \neq 0$ служит график линейной функции $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, а при $b=0$ «вертикальная» прямая $x=-\frac{c}{a}$ (рис. 169).

Таким образом, ***любая прямая плоскости есть график некоторого линейного уравнения.***

Графики линейных уравнений при различных a, b, c изображены на рисунке 170.

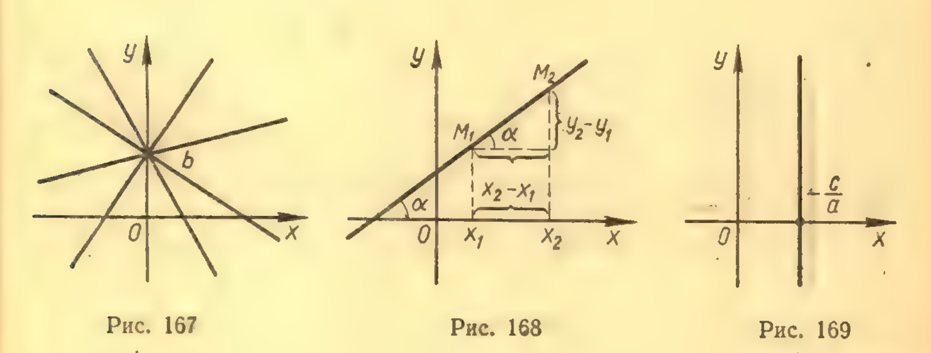


Рис. 167 Рис. 168 Рис. 169

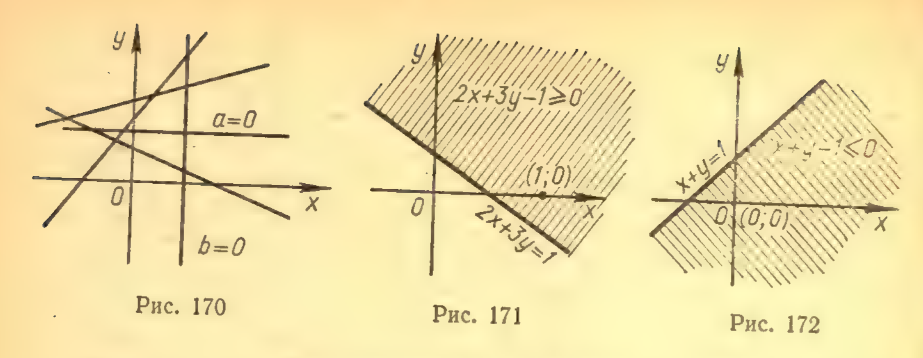


Рис. 170 Рис. 171 Рис. 172

Множеством решений неравенства $(ax + by + c \leqslant 0)$ или $(ax + by + c \geqslant 0)$ служит полуплоскость, границей которой является прямая $ax + by + c = 0$. Соответствующие примеры приведены на рисунках 171—174. Чтобы узнать, какая из двух полуплоскостей является решением, берем пробную точку.

Множество решений неравенства $ax + by + c > 0$ или $ax + by + c < 0$ — открытая полуплоскость с границей, являющейся прямой $ax + by + c = 0$ (рис. 175). Для того чтобы определить, какая из двух полуплоскостей является множеством решений неравенства, достаточно проверить, удовлетворяют ли неравенству координаты какой-либо точки полуплоскости (при $c \neq 0$ проще всего взять точку O).

9*. Преобразование графиков функций

Часто график одной функции можно получить из графика другой с помощью геометрических преобразований. При этом простейшими геометрическими преобразованиями являются переносы параллельно осям координат, сжатие и растяжение к осям. Рассмотрим в отдельности каждое элементарное преобразование, а потом и их композиции.

1°. Перенос графика параллельно оси ординат. Графики функций f и g, где $g(x) = f(x) + a$, конгруэнтны. График функции g

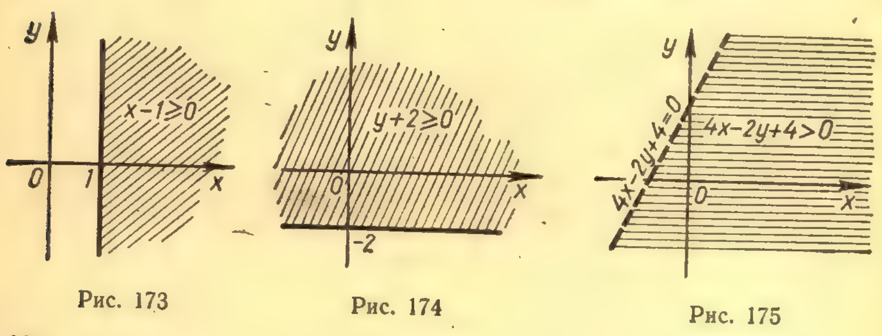


Рис. 173 Рис. 174 Рис. 175

получается из графика функции f с помощью переноса $\vec{a} = \vec{r}(0;\ a)$ (рис. 176). Если число a положительно, то график переносится параллельно оси ординат вверх, а если a отрицательно, то вниз.

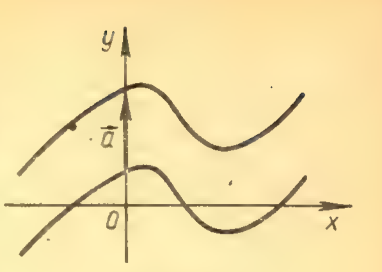


Рис. 176

Пример 1. График квадратного трехчлена $y = x^2 + 3$ смещен параллельно оси ординат на 3 единицы вверх по отношению к графику квадратного трехчлена $y = x^2$ (рис. 177), а график функции $y = x^2 - 5$ смещен на 5 единиц вниз по отношению к графику $y = x^2$.

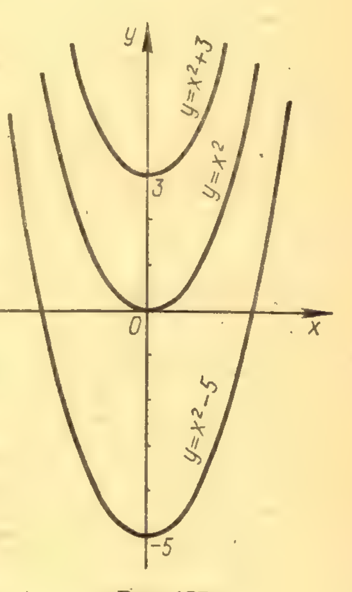


Рис. 177

2°. Перенос графика параллельно оси абсцисс. На рисунке 178 изображены три графика — графики функций f, g и h. При этом $g(x) = f(x + a)$ и $h(x) = f(x + b)$. График функции g получается из графика функции f переносом $\vec{r}(-a;\ 0)$. На рисунке 178 для функции g число a равно 2, а для функции h число b равно -4.

Пример 2. График квадратного трехчлена $y = (x + a)^2$ получается из графика $y = x^2$ параллельным переносом $\vec{r}(-a;\ 0)$ (рис. 179, $a = 2{,}5$ и $a = -3{,}5$).

Возьмем любую точку $(x;\ y)$ на графике функции f. Координаты этой точки удовлетворяют равенству $y = f(x)$. При параллельном пе-

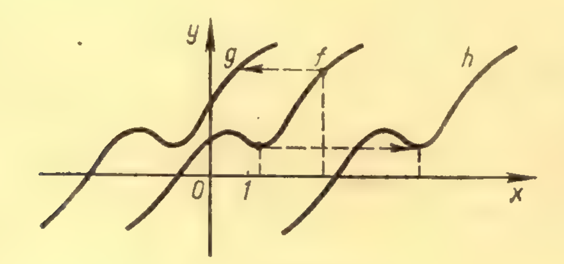


Рис. 178

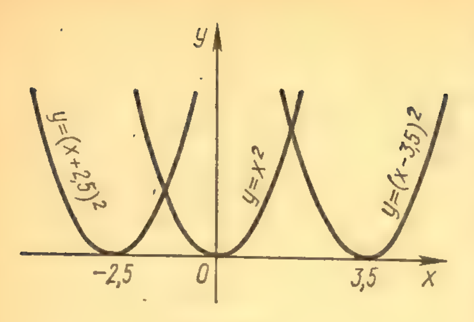


Рис. 179

реносе $\vec{r}\,(-a;\,0)$ точка $(x;\,y)$ перейдет в точку $(x-a;\,y)$. Координаты полученной точки удовлетворяют равенству $y = f\,(x - a + a)$, т. е. $y = g\,(x - a)$. Следовательно, после параллельного переноса точка оказывается на графике функции g. Аналогично проверяется, что каждая точка графика функции g получается после переноса из некоторой точки графика функции f.

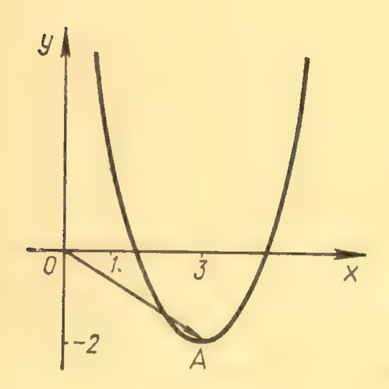


Рис. 180

Пример 3. На рисунке 180 график квадратного трехчлена $g\,(x) = (x-3)^2 - 2$ смещен параллельно оси ординат на 2 вниз и параллельно оси абсцисс на 3 вправо по отношению к графику квадратного трехчлена $f\,(x) = x^2$. Таким образом, график функции g получен из графика функции f переносом $\vec{r}\,(3;\,-2)$.

В учебнике VII класса было сказано, что графики функций $y = ax^2$ и $y = ax^2 + bx + c$ при одном и том же $a \neq 0$ конгруэнтны и второй получается из первого с помощью параллельного переноса. Докажем это.

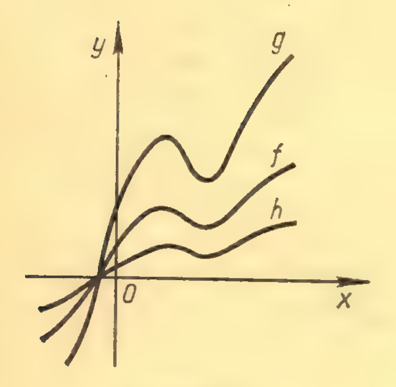


Рис. 181

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}.$$

Из равенства

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

видно, что график функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

получается из графика функции $y = ax^2$ с помощью параллельного переноса $\vec{r}\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$. Графиком функции $y = ax^2$ является парабола. Следовательно, и графиком квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ тоже будет парабола.

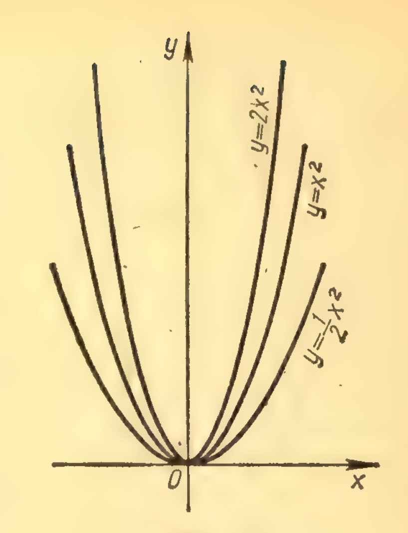


Рис. 182

3⁰. **Растяжение и сжатие графика к оси абсцисс.** На рисунке 181 изображены графики трех функций f, g и h. При этом $g(x) = af(x)$ при $a > 1$ и $h(x) = bf(x)$ при $0 < b < 1$. От умножения всех значений функции f на число $a > 1$ ординаты всех точек графика увеличиваются в a раз и получается растяжение графика от оси абсцисс в a раз. От умножения всех значений функции f на число b при $0 < b < 1$ ординаты всех точек графика уменьшаются в $\frac{1}{b}$ раз. Согласно принятой в п. 81 терминологии мы будем говорить, что графики функций g и h получены из графика функции f сжатием к оси абсцисс в отношении $1 : a$ и $1 : b$ соответственно.

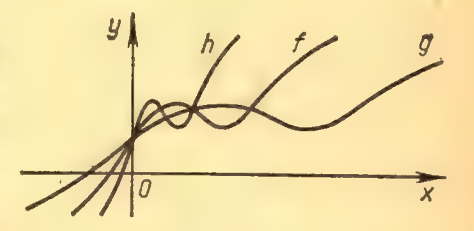


Рис. 183

Пример 4. График функции $y = 2x^2$ (рис. 182) получается из графика функции $y = x^2$ сжатием к оси абсцисс в отношении $1 : 2$, а график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ — сжатием к оси абсцисс в отношении $1 : \frac{1}{2}$.

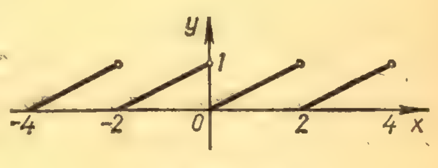


Рис. 184

4⁰. **Растяжение и сжатие графика к оси ординат.** График функции $g(x) = f\left(\frac{x}{a}\right)$ получается из графика функции f сжатием к оси ординат в отношении $1 : a$ (рис. 183).

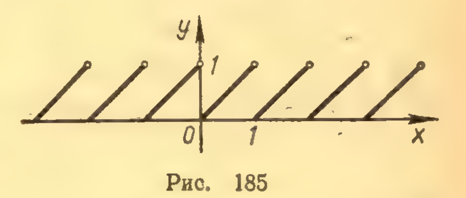


Рис. 185

Пример 5. График функции $y = \left\{\frac{1}{2}x\right\}$ (рис. 184) получается из

графика функции $y = \{x\}$ (рис. 185) сжатием к оси Oy в отношении $1:2$, а график функции $y = \{2x\}$ (рис. 186) — сжатием к оси Oy в отношении $1:\frac{1}{2}$.

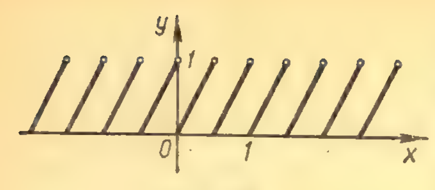


Рис. 186

Пример 6. График квадратного трехчлена $y = 2x^2 + 2x + 1{,}5$ (рис. 187), т. е. $y = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1$, получается из графика квадратного трехчлена $y = x^2$ следующими преобразованиями: а) сжатием к оси абсцисс в отношении $1:2$; б) переносом $\vec{r}\,(0;\,1)$; в) переносом $\vec{r}\left(-\frac{1}{2};\,0\right)$; вместо б) и в) можно сразу сделать перенос $\vec{r}\left(-\frac{1}{2};\,1\right)$.

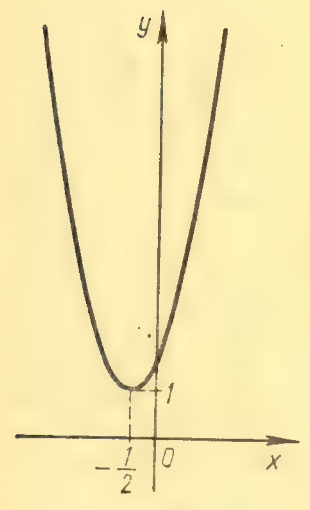


Рис. 187

10. Исследование квадратного трехчлена

1°. Разложение квадратного трехчлена на множители. Функция $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — некоторые действительные числа ($a \neq 0$), называется *квадратичной*, а выражение ax^2+bx+ $+c$ — *квадратным трехчленом.*

Преобразуем квадратный трехчлен. Получим (см. п. 9)

$$y = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right). \quad (1)$$

Выражение $b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом квадратного трехчлена* и обозначают буквой D:

$$D = b^2 - 4ac.$$

Если $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$, то (1) можно разложить на множители как разность квадратов выражений $x + \frac{b}{2a}$ и $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = a\,(x - x_1)(x - x_2), \quad (2)$$

где

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Окончательно получаем:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Если же $D < 0$, то $a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \neq 0$ при всех значениях x. Это выражение поэтому (а следовательно, и выражение $ax^2 + bx + c$) нельзя разложить на линейные множители, т. е. нельзя представить в виде $(px + q)(ex + f)$, так как произведение $(px + q)(ex + f) = 0$ при $x = -\frac{q}{p}$ или $x = -\frac{f}{e}$.

2°. **Корни квадратного уравнения.** *Квадратным уравнением* называют уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

при $a \neq 0$.

При $b^2 - 4ac \geqslant 0$ уравнение (1) равносильно уравнению

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0. \qquad (2)$$

Так как произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей обращается в нуль, то уравнение (2) имеет корни $x = x_1$ и $x = x_2$. Эти корни совпадают при $b^2 - 4ac = 0$.

При $b^2 - 4ac < 0$ выражение $ax^2 + bx + c$ не обращается в нуль (см. 1°), поэтому уравнение (1) корней не имеет.

Итак, при $b^2 - 4ac < 0$ уравнение (1) не имеет корней, при $b^2 - 4ac = 0$ уравнение (1) имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$, при $b^2 - 4ac > 0$ уравнение (1) имеет два корня, которые принято записывать одной формулой

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (3)$$

Число корней квадратного уравнения (1) зависит от знака D.

Пример 1. Дискриминант квадратного уравнения

$$6x^2 - x - 1 = 0$$

равен $1^2 - 4 \cdot 6(-1) = 25 > 0$, поэтому уравнение имеет два корня: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{12}$, т. е. $x_1 = -\frac{1}{3}$; $x_2 = \frac{1}{2}$. Кроме того, квадратный трехчлен $6x^2 - x - 1$ можно разложить на множители $6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (3x + 1)(2x - 1)$.

Пример 2. Дискриминант квадратного уравнения $2x^2 - 3x + 2 = 0$ равен $3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 < 0$. Поэтому данное уравнение не имеет корней и трехчлен $2x^2 - 3x + 2$ нельзя разложить на линейные множители.

Пример 3. Уравнение $9x^2 + 12x + 4 = 0$ имеет один корень $-\frac{12}{2 \cdot 9} = -\frac{2}{3}$, так как его дискриминант равен нулю ($12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 0$).

Разложение трехчлена $9x^2 + 12x + 4$ на множители имеет вид:

$$9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2.$$

Пример 4. Уравнение $-3x^2 + 2x + 1 = 0$ имеет два корня:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 1}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-2 \pm 4}{-6}, \text{ т. е. } x_1 = 1;\ x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Иногда формулу корней квадратного уравнения записывают в другом виде:

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}, \tag{3'}$$

в частности, при $a = 1$ получаем:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}. \tag{4}$$

Пример 5. Для решения уравнения $-3x^2 + 2x + 1 = 0$ примера 4 удобнее воспользоваться формулой (3'):

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - (-3) \cdot 1}}{-3} = \frac{-1 \pm 2}{-3}, \text{ т. е. } x_1 = 1;\ x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Пример 6. Уравнение $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$ имеет два корня:

$$x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}, \text{ т. е. } x_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = 2.$$

3°. **Теорема Виета.** Найдем сумму и произведение корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Равенства $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ выражают содержание *теоремы Виета.*

Пример 7. Уравнение $5x^2 - 11x + 4 = 0$ имеет два корня, так как его дискриминант положителен $(11^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 41 > 0)$. Сумма этих корней равна $-\frac{-11}{5} = \frac{11}{5}$, произведение равно $\frac{4}{5}$.

Для составления квадратного уравнения по его корням и в некоторых случаях для решения уравнений применяют теорему, обратную теореме Виета:

Числа x_1 и x_2 служат корнями квадратного уравнения

$$x^2 - b\,x + c = 0,$$

где $b = x_1 + x_2$, $c = x_1 \cdot x_2$.

В самом деле, x_1 и x_2 — корни уравнения $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, т. е. уравнения $x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 \cdot x_2 = 0$.

Пример 8. Числа 0,2 и 4,5 служат корнями уравнения

$$x^2 - (0{,}2 + 4{,}5) \cdot x + 0{,}2 \cdot 4{,}5 = 0,$$

т. е. уравнения $x^2 - 4{,}7x + 0{,}9 = 0$.

Заметим, что уравнение $x^2 - 4{,}7x + 0{,}9 = 0$ равносильно уравнению $a\,(x^2 - 4{,}7x + 0{,}9) = 0$, где a — любое действительное число, отличное от нуля; например, при $a = 10$ получим:

$$10x^2 - 47x + 9 = 0.$$

4⁰. **График квадратичной функции.** Для построения графика воспользуемся общей схемой исследования функции.

1. Область определения — вся числовая прямая.

2. Так как $f(x) = ax^2 + bx + c$, то $f'(x) = 2ax + b$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$.

3. Единственная критическая точка функции:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

4. Если $a > 0$, то $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{b}{2a};\ \infty\right[$;

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right[.$$

5. Если $a < 0$, то $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right[$;

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{b}{2a};\ \infty\right[.$$

При построении графика полезно воспользоваться информацией о корнях трехчлена $ax^2 + bx + c$ (см. 2⁰).

Расположение графика функции по отношению к оси абсцисс в шести подслучаях изображено на рисунке 188.

Точка графика с абсциссой $x_0 = -\frac{b}{2a}$ называется *вершиной* параболы, ордината этой точки равна

$$y_0 = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

График функции $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 189) получается из графика функции $y = ax^2$ при параллельном переносе

$$\vec{p}\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right).$$

	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$		
$D = 0$		
$D < 0$		

Рис. 188

Так как функция $y = ax^2$ четная, то ее график симметричен относительно оси ординат.

График функции $y = ax^2 + bx + c$ симметричен относительно прямой $x = -\frac{b}{2a}$ — образа оси ординат при параллельном переносе $\vec{r}\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$.

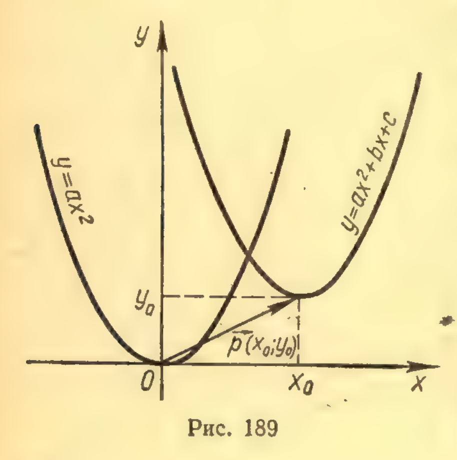


Рис. 189

5°. Решение квадратичных неравенств. Знак квадратного трехчлена совпадает со знаком коэффициента при x^2 на всей числовой прямой, кроме промежутка между корнями (если корни существуют).

Пример 9. Корнями квадратного трехчлена

$$2x^2 - 3x - 5$$

служат числа -1 и $2,5$. Так как коэффициент при x^2 положителен (он равен 2), то на промежутках $]-\infty; -1[$ и $]2,5; \infty[$ $2x^2 - 3x - 5 > 0$, а на промежутке $]-1; 2,5[$ $2x^2 - 3x - 5 < 0$.

Пример 10. Так как трехчлен $-x^2+3x-11$ не имеет корней (его дискриминант отрицателен: $3^2-44=-35<0$) и коэффициент при x^2 отрицателен, то неравенство

$$-x^2+3x-11>0$$

не имеет решений.

Пример 11. Множество решений неравенства $-x^2+3x-11<0$ — вся числовая прямая; $]-\infty; \infty[$.

Пример 12. Множество решений неравенства

$$16x^2-24x+9\leqslant 0$$

состоит из одной точки $x=\frac{3}{4}$ (так как $24^2-16\cdot 9\cdot 4=0$ и корни уравнения $16x^2-24x+9=0$ совпадают: $x_1=x_2=\frac{3}{4}$).

11. Предел последовательности

1°. Понятие последовательности. *Бесконечной числовой последовательностью* называется числовая функция, определенная на множестве N натуральных чисел.

Иногда рассматривают конечные последовательности — функции, заданные на множестве первых n натуральных чисел.

Последовательность — частный вид функции, поэтому способы задания и обозначения функции применимы и для последовательностей.

Однако чаще члены последовательности обозначают буквами, снабженными индексами:

$$f(1)=f_1;\ f(2)=f_2;\ \ldots;\ f(n)=f_n.$$

Последовательность с n-м членом a_n часто обозначают так: $(a_1; a_2; \ldots; a_n; \ldots)$, или более коротко: (a_n).

В этих обозначениях индекс (порядковый номер члена) n — значение аргумента, а a_n — соответствующее значение функции; при этом подразумевается, что переменная «пробегает» все множество N; для конечных последовательностей указывают соответствующие ограничения (например, $n\leqslant 10$, $n\in N$ или просто $n\leqslant 10$).

Наиболее распространены два способа задания последовательности: *аналитический* и *рекуррентный.*

Аналитически последовательность задают при помощи формулы, указывающей, как по номеру n вычисляется член последовательности x_n с этим номером. Эту формулу называют формулой n-го члена последовательности.

7 Заказ 273

Пример 1. $x_n = \frac{n^2}{5-2n}$.

С помощью этой формулы можно вычислить любой член последовательности, например:

$$x_3 = \frac{3^2}{5-2\cdot 3} = -9; \quad x_{100} = \frac{100^2}{5-2\cdot 100} = \frac{10\,000}{-195} = -\frac{2\,000}{39}.$$

Условие $n \in N$ обычно опускают.

Пример 2. Формула $x_n = \frac{2}{n-3}$ не задает последовательности, так как x_3 не определено. Для того чтобы функция $x(n)$ стала последовательностью, нужно доопределить ее значение в точке $n = 3$. Например:

$$x_n = \begin{cases} \frac{2}{n-3} & \text{при } n \neq 3 \\ 1 & \text{при } n = 3. \end{cases}$$

При рекуррентном способе задания последовательности обычно указывают:

1) первый член последовательности (или несколько, например, k первых членов);

2) формулу (или правило), позволяющую определить $(n+1)$-й член последовательности по номеру $n \geqslant 1$ (или $n \geqslant k$) и членам последовательности с номерами, не превосходящими n.

При таком способе задания последовательности каждому натуральному n будет поставлено в соответствие число, и притом только одно. Строгое обоснование этого дается методом математической индукции.

Пример 3. Пусть $x_1 = 2$ и при $n \geqslant 1$ $x_{n+1} = x_n + 5$.

Легко проверить, что эти условия определяют арифметическую прогрессию (x_n), где $x_n = 5n - 3$.

Пример 4. Пусть $x_1 = x_2 = 1$, а при $n \geqslant 2$ $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$. Эти условия задают *последовательность Фибоначчи*:

$$(1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; \ldots).$$

Геометрически последовательность изображают двумя способами:

1) при помощи графика (как функции натурального аргумента);

2) члены последовательности изображаются точками координатной прямой, снабженными соответствующими пометками.

Пример 5. На рисунках 190 и 191 изображены последовательности

$$x_n = \frac{8}{n+1} \text{ и } y_n = \frac{2n-5}{n}.$$



Рис. 190

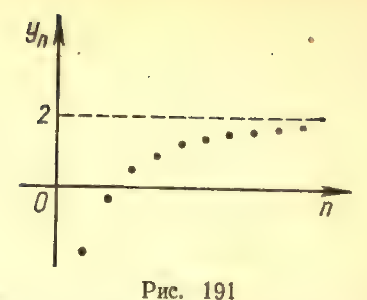


Рис. 191

2°. Монотонные последовательности. Ограниченные последовательности. Последовательность (x_n) называется *возрастающей*, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т. е. если для любого натурального n выполняется неравенство

$$x_{n+1} > x_n. \qquad (1)$$

Неравенство (1) часто записывают в виде $x_{n+1} - x_n > 0$, а для последовательности с положительными членами в виде

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1.$$

Пример 6. Последовательность $y_n = \frac{n-1}{2n}$ является возрастающей, так как

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2n(n+1)} > 0.$$

Последовательность (x_n) называется *убывающей*, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т. е. если для любого натурального n выполняется неравенство

$$x_{n+1} < x_n. \qquad (2)$$

Неравенство (2) часто записывают в виде $x_{n+1} - x_n < 0$, а для последовательности с положительными членами в виде

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1.$$

Пример 7. Геометрическая прогрессия со знаменателем q, где $0 < q < 1$, является убывающей последовательностью, если ее первый член положителен, и возрастающей, если ее первый член отрицателен.

Последовательность (x_n) называется *невозрастающей*, если каждый ее член, начиная со второго, не больше предыдущего, т. е. если для любого натурального n выполняется неравенство

$$x_{n+1} \leqslant x_n. \qquad (3)$$

Неравенство (3) часто записывают в виде $x_{n+1} - x_n \leqslant 0$, а для последовательности с положительными членами — в виде

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant 1.$$

Последовательность (x_n) называется *неубывающей*, если каждый ее член, начиная со второго, не меньше предыдущего, т. е. если для любого натурального n выполняется неравенство

$$x_{n+1} \geqslant x_n. \tag{4}$$

Неравенство (4) часто записывают в виде $x_{n+1} - x_n \geqslant 0$, а для последовательности с положительными членами — в виде

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 1.$$

Пример 8. Любая возрастающая последовательность является неубывающей, любая убывающая последовательность является невозрастающей.

Пример 9. Постоянная последовательность $y_n = 5$ является одновременно и невозрастающей и неубывающей.

Невозрастающие и неубывающие последовательности называют монотонными последовательностями.

Пример 10. Последовательность $x_n = (-1)^n$ не является монотонной.

Последовательность (y_n) называется ограниченной, если существуют два числа m и M такие, что для всех n выполняется неравенство $m \leqslant y_n \leqslant M$.

Пример 11. Последовательность $x_n = \frac{3n+2}{3n}$ является ограниченной, так как для любого n выполняется неравенство

$$1 < x_n \leqslant 1\frac{2}{3}.$$

Последовательность $y_n = n^2$ не является ограниченной, так как для любого числа $M > 0$ при $n > \sqrt{M}$ будет $n^2 > M$.

3⁰. **Предел последовательности.** Число a называется *пределом последовательности* (x_n), если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Интервал $]a - \varepsilon;\ a + \varepsilon[$ называют ε-окрестностью точки a. Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

т. е. если число a — предел последовательности (x_n), то $x_n \in\ ]a - \varepsilon;\ a + \varepsilon[$ при $n > N$.

Итак, если число a является пределом последовательности x_n, то в произвольную окрестность точки a попадают все члены данной последовательности, кроме, быть может, конечного их числа.

Пример 12. Последовательность $y_n = \frac{3n-2}{n}$ имеет пределом 3, так как для произвольного положительного ε $|y_n - 3| < \varepsilon$ при $n > \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$.

В самом деле, при $n > \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$

$$|y_n - 3| = \left|\frac{3n-2}{n} - 3\right| = \left|\frac{2}{n}\right| = \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

Пример 13. Пусть $x_n = c$, т. е. (x_n) — постоянная последовательность, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

Действительно, $|x_n - c| = 0 < \varepsilon$ при любом натуральном n.

Последовательность может иметь только один предел. Если у последовательности имеется предел, то такую последовательность называют *сходящейся*; последовательность, не имеющую предела, называют *расходящейся*.

Необходимым условием существования предела последовательности является ее ограниченность.

Пример 14. Последовательность $x_n = \frac{-2}{n^2}$ сходится к нулю. Поэтому эта последовательность ограничена. (Отметим, что в качестве чисел m и M в определении ограниченной последовательности можно взять числа -2 и 0.)

Пример 15. Последовательность $x_n = n^2 + 1$ расходящаяся (объясните почему).

Пример 16. Для последовательности $y_n = 1 - 2n$ не выполнено необходимое условие сходимости (эта последовательность не ограничена), следовательно, (y_n) — расходящаяся последовательность. Из этих же соображений расходится и последовательность примера 15.

4°. Теоремы о пределах. Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$; (1)

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$; (2)

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. (3)

Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, $y_n \neq 0$ и предел последовательности (y_n) отличен от нуля, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Пример 17. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n.$$

В самом деле, в силу (3)

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot x_n) = \lim_{n\to\infty} c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Пример 18. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}-1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-1\right)} =$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 1} = \frac{2-0}{0-1} = -2.$$

Пример 19. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n-1}{n^3+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}} =$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{0+0-0}{1+0} = 0.$$

Пример 20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{4n-3} \cdot \frac{2n^2+3}{n^2+2n-1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{4n-3} \times$

$$\times \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+2n-1} = \frac{2}{4-0} \cdot \frac{2+0}{1+0-0} = \frac{2}{4} \cdot 2 = 1.$$

5°. **Теорема Вейерштрасса.** ***Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.***

Подчеркнем, что теорема Вейерштрасса не дает способа нахождения предела. Но в ряде случаев для вычисления предела достаточно знать, что предел существует. При этом обычно пользуются тем, что для любой сходящейся последовательности (x_n)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1}.$$

Пример 21. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $0 < q < 1$.

В самом деле, последовательность q^n монотонна (так как для любого n имеем $q^{n+1} = q \cdot q^n < q^n$) и ограничена (так как $0 < q^n < 1$). В силу теоремы Вейерштрасса эта последовательность имеет предел; обозначим его через b. Тогда

$$b = \lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} (q \cdot q^{n-1}) = q \cdot \lim_{n\to\infty} q^{n-1} = q \cdot b.$$

Таким образом, $b = qb$, т. е. $b(1-q) = 0$. Так как $(1-q) \neq 0$, то $b = 0$.

П р и м е р 22. Можно доказать, что последовательность p_n периметров правильных n-угольников, вписанных в окружность единичного диаметра, возрастает. Кроме того, эта последовательность ограничена: $0 < p_n < 4$ ($p_n < 4$, так как периметр любого вписанного многоугольника меньше периметра любого описанного, например квадрата); по теореме Вейерштрасса эта последовательность имеет предел. Этот предел обозначают через π.

12. Метод математической индукции

Если предложение $A(n)$, в котором n — натуральное число, истинно для $n = 1$ и из того, что оно истинно для $n = k$ (где k — любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего числа $n = k + 1$, то предложение $A(n)$ истинно для любого натурального числа.

Сформулированный принцип — принцип *математической индукции* — является одной из аксиом арифметики натуральных чисел. На этом принципе основан метод доказательства, называемый *методом математической индукции.*

Доказательство методом математической индукции состоит из двух частей: в первой части проверяют истинность высказывания $A(1)$; во второй части предполагают, что $A(n)$ истинно для $n = k$, и доказывают истинность высказывания $A(k + 1)$. Если обе части доказательства проведены, то $A(n)$ истинно для любого натурального n на основании принципа математической индукции.

П р и м е р 1. Докажем, что n-й член арифметической прогрессии может быть вычислен по формуле $a_n = a_1 + (n - 1)d$, где a_1 — первый член прогрессии, а d — ее разность.

Обозначим через $A(n)$ равенство $a_n = a_1 + (n - 1)d$ для натурального числа n.

1) $A(1)$ истинно, так как $a_1 = a_1 + (1 - 1)d = a_1$.

2) Докажем, что для любого $k \in N$ $A(k) \Longrightarrow A(k + 1)$, т. е. если $a_k = a_1 + (k - 1)d$, то $a_{k+1} = a_1 + kd$. В самом деле, в силу определения арифметической прогрессии $a_{k+1} = a_k + d$; подставляя $a_1 + (k - 1)d$ вместо a_k, получаем

$$a_{k+1} = a_1 + (k - 1)d + d = a_1 + kd.$$

Обе части доказательства методом математической индукции проведены, поэтому $A(n)$ истинно для любого натурального n.

П р и м е р 2. Докажем, что для любого натурального n число $5^{2n+1} + 1$ кратно 6.

Обозначим через x_n число $5^{2n+1} + 1$, а через $A(n)$—предложение «x_n делится на 6».

1) $A(1)$ истинно, так как $5^{2\cdot1+1} + 1 = 126$ делится на 6.

2) Докажем, что при любом $k \in N$ из истинности $A(k)$ следует истинность $A(k + 1)$, т. е. из того, что x_k делится на 6, следует, что x_{k+1} делится на 6. В самом деле, $x_{k+1} = 5^{2k+3} + 1 = 25 \cdot 5^{2k+1} + 1 = 24 \cdot 5^{2k+1} + x_k$.

Так как x_k делится на 6 в силу предположения индукции и $24 \cdot 5^{2k+1}$ делится на 6, то и сумма этих чисел x_{k+1} делится на 6.

Обе части доказательства методом математической индукции проведены, следовательно, предложение $A(n)$ истинно для любого натурального числа n.

13. Комбинаторика

1°. **Перестановки. Число перестановок.** *Установленный в конечном множестве порядок называют перестановкой его элементов.* Число перестановок элементов конечного множества зависит только от числа элементов, для множества из n элементов это число обозначают через P_n.

Множество из одного элемента можно упорядочить единственным образом: единственный элемент множества приходится считать первым.

Для вычисления P_n обычно пользуются рекуррентной формулой

$$P_1 = 1; \; P_n = n \cdot P_{n-1} \text{ при } n > 1. \quad (1)$$

Методом математической индукции можно доказать, что P_n равно произведению n первых натуральных чисел:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n. \quad (2)$$

Короче произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ обозначают через $n!$. Поэтому $P_n = n!$. Читают: «эн факториал».

По дополнительному определению полагают $P_0 = 0! = 1$.

Пример 1. 7 книг можно расставить в ряд на одной полке $7! — 5040$ способами.

Пример 2. Из цифр 2, 4, 6, 8, 0 можно составить $5! - 4! = 96$ пятизначных чисел. При этом в записи каждого из этих чисел каждая цифра встречается только один раз.

В самом деле, из цифр 0, 2, 4, 6, 8 можно образовать 5! перестановок, из них не являются пятизначными числами перестановки, начинающиеся с нуля. Таких перестановок столько, сколько можно составить перестановок из четырех остальных цифр, т. е. 4!.

2°. **Размещения. Число размещений.** Множество вместе с заданным порядком расположения его элементов называют *упорядоченным множеством*. Упорядоченные множества записывают, располагая в круглых скобках его элементы в заданном порядке. Например, (A; $Б$; $В$) — упорядоченное множество с первым элементом A, вторым элементом $Б$ и третьим элементом $В$.

Конечные упорядоченные множества называют *размещениями*. Число размещений по m элементов в каждом, составленных из данных n элементов, обозначают через A_n^m.

Для вывода формулы для числа размещений можно пользоваться рекуррентной формулой.

$$A_n^1 = n \text{ и } A_n^{m+1} = (n - m) A_n^m \text{ при } 1 \leqslant m < n. \quad (3)$$

Методом математической индукции можно доказать, исходя из формулы (3), что

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (4)$$

Формула (4) справедлива при любых $n, m \in Z_0$, если

$$0 \leqslant m \leqslant n.$$

Эту формулу можно также вывести из формулы (2), подходящим образом подсчитывая число перестановок из n элементов исходного множества. Действительно, пусть требуется упорядочить множество из n элементов. Тогда какие-либо m элементов придется поставить в определенном порядке на первые m из n мест. Это можно сделать A_n^m способами. Если первые m мест заняты, то останется $(n - m)$ элементов. Ими придется занять последние $(n - m)$ мест. Это можно сделать P_{n-m} способами (по смыслу P_{n-m}). Всего получается $A_n^m \cdot P_{n-m}$ способов упорядочить множество из n элементов, т. е.

$$P_n = A_n^m \cdot P_{n-m}, \text{ или } n! = A_n^m \cdot (n-m)!,$$

откуда

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Формулу (4) часто записывают в виде

$$A_n^m = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1). \quad (5)$$

Пример 3. Трех человек на три различные должности из восьми кандидатов на эти должности можно выбрать A_8^3 способами. По формуле (5)

$$A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

3°. **Сочетания. Число сочетаний. Свойства числа сочетаний.** В комбинаторике конечные множества называют *сочетаниями*. Число сочетаний из n по m (т. е. подмножеств по m элементов в каждом, содержащихся в множестве из n элементов) обозначается через C_n^m.

Подсчитывая число размещений из n по m, можно получить, что $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$, откуда

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \quad (6)$$

Формулу (6) часто записывают в виде

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m}. \quad (7)$$

Пример 4. Из 8 шахматистов нужно составить команду, в которую входили бы 3 человека. Это можно сделать C_8^3 способами. По формуле (7) имеем $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$.

Пример 5. Для любых n и m $(0 \leqslant m \leqslant n)$ верно равенство

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Действительно,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!\,(n-(n-m))!} = C_n^{n-m}.$$

Пример 6. Число всех подмножеств конечного множества, состоящего из n элементов, равно 2^n.

Доказательство можно провести методом математической индукции. Так как сумма

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$$

есть не что иное, как полное число подмножеств множества из n элементов, то

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n. \qquad (8)$$

Доказать равенство (8) можно также при помощи формулы Ньютона, положив $a = b = 1$.

Пример 7. Для любых n и m таких, что $0 \leqslant m < n$, справедливо равенство

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}. \qquad (9)$$

В самом деле,

$$C_n^m + C_n^{m+1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m} + \frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m(m+1)} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)(m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m(m+1)} + \frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m(m+1)} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)(m+1+n-m)}{(m+1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-m+1)}{(m+1)!} =$$

$$= C_{n+1}^{m+1}.$$

Таблицу, n-я строка которой состоит из $(n+1)$ числа $(n \in Z_0)$

$$C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ \ldots,\ C_n^n,$$

называют *треугольником Паскаля*. Формула (9) позволяет последовательно заполнять строки треугольника Паскаля, пользуясь тем, что в начале и конце каждой строки стоят единицы. Поэтому иногда эту формулу называют рекуррентной формулой для вычисления числа сочетаний.

14. Предел и непрерывность функции

1°. Предел функции. Число b называется *пределом функции* $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$, будет выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Так как $|x - a| < \delta \Leftrightarrow x \in]a - \delta; a + \delta[$, то определение предела можно сформулировать следующим образом:

Число b называется пределом $f(x)$ при x, стремящемся к a, если при любом $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность точки a, что для любого $x \neq a$ из этой окрестности выполняется неравенство:

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

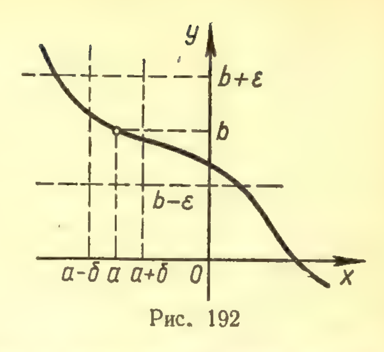


Рис. 192

Для существования предела $f(x)$ в точке a необходимо, чтобы функция была определена во всех точках некоторой окрестности точки a, кроме, может быть, самой точки a (рис. 192).

П р и м е р 1. Для $g(x) = c$ имеем $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$.

Действительно, $|g(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ для любого положительного числа ε. В качестве δ можно взять любое число.

П р и м е р 2. Пусть $h(x) = \frac{2x^2 - 2x}{1 - x}$. Тогда $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = -2$.

В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ при $x \neq 1$

$$|h(x) - (-2)| = \left| -\frac{2x(x-1)}{x-1} + 2 \right| = |2 - 2x| = 2|x - 1| < 2\delta = \varepsilon$$

при $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ и $x \in]-\delta + 1; 1[\cup]1; 1 + \delta[$.

П р и м е р 3. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ при $a > 0$.

Действительно, для любого положительного ε имеем

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left| \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| < \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$$

при $|x - a| < \sqrt{a} \cdot \varepsilon$ и $x \geqslant 0$;

$$x > 0 \text{ при } |x - a| < a.$$

В качестве δ можно взять минимальное из чисел $\sqrt{a} \cdot \varepsilon$ и a. Предел $\sqrt{x}$ при $x \to 0$ не существует, так как в каждой окрестности точки нуль есть точки, принадлежащие отрицательному лучу $]-\infty; 0[$. Для таких x функция $\sqrt{x}$ не определена.

Отметим, что функция $f(x)$ может иметь только один предел при x, стремящемся к a.

2°. **Теоремы о пределах.** Если при x, стремящемся к a, существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то при x, стремящемся к a, существуют также пределы суммы, разности и произведения этих функций, при этом

а) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}g(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

Если, кроме того, $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$, то существует предел частного функций f и g и

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.$$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to a}(cf(x))=\lim\limits_{x\to a}c\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)=c\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$, т. е. постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Пример 5. Вычислим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}.$$

Для этого разложим на множители числитель и знаменатель:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+2}=\frac{3}{4}.$$

Пример 6.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1})^2-2^2}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}+\lim\limits_{x\to 3}2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

Пример 7. Докажем, что $\lim\limits_{x\to x_0}x^n=x_0^n$ для $n\in N$.

Так как 1) $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$ и 2) из $\lim\limits_{x\to x_0}x^k=x_0^k$ следует, что

$$\lim_{x\to x_0}x^{k+1}=\lim_{x\to x_0}(x\cdot x^k)=\lim_{x\to x_0}x\cdot\lim_{x\to x_0}x^k=x_0\cdot x_0^k=x_0^{k+1},$$

то $\lim\limits_{x\to x_0}x^n=x_0^n$ при любом натуральном n в силу принципа математической индукции.

Пример 8. Для любого многочлена $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ ($a_0\neq 0$, n — степень многочлена) имеем:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}(a_0x^n)+\lim_{x\to x_0}(a_1x^{n-1})+\ldots+\lim_{x\to x_0}a_{n-1}x+\lim_{x\to x_0}a_n=$$

$$=a_0\lim_{x\to x_0}x^n+a_1\lim_{x\to x_0}x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lim_{x\to x_0}x+a_n=$$

$$=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\ldots+a_n=P(x_0).$$

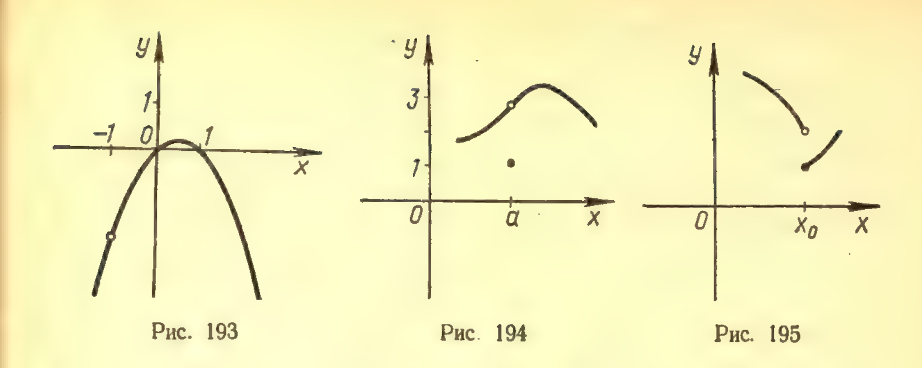


Рис. 193 Рис. 194 Рис. 195

В частности, $\lim\limits_{x \to 2} (2x^4 - 3x^2 + 8) = 2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^2 + 8 = 32 - 12 + 8 = 28$.

3°. **Непрерывные и разрывные функции.** Функция f называется *непрерывной* в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Пример 9. Для любого многочлена $P(x)$ (см. пример 8)

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0).$$

Следовательно, многочлен — непрерывная функция в каждой точке числовой прямой.

Пример 10. Дробно-рациональная функция $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ($P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены) непрерывна в каждой точке области определения.

В самом деле, $D(R) = \{x | x \in \mathbf{R},\ Q(x) \neq 0\}$. При $x_0 \in D(R)$

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = R(x_0).$$

Пример 11. Про функцию $y = \frac{x - x^3}{1 + x}$ нельзя сказать, что она непрерывна в точке -1, так как в этой точке она не определена (рис. 193).

Пример 12. Для функции $g(x)$, график которой изображен на рисунке 194, имеем:

$$\lim_{x \to a} g(x) = 3 \text{ и } g(a) = 1.$$

Следовательно, $g(x)$ разрывна в точке a.

Пример 13. Функция $H(x)$ разрывна в точке x_0 (рис. 195), так как не существует предела этой функции при x, стремящемся к x_0.

15. Производная, ее геометрический и физический смысл

1°. Приращение функции. Пусть задана функция $y = f(x)$. Зафиксируем некоторую точку x_0, принадлежащую области определения функции f. Для любого $x \in D(f)$ разность $x - x_0$ называют приращением независимой переменной x в точке x_0 и обозначают Δx. Из равенства $\Delta x = x - x_0$ следует, что $x = x_0 + \Delta x$. Разность $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называют приращением функции f в точке x_0 и обозначают $\Delta f(x_0)$.

Отметим, что точка x_0 зафиксирована, поэтому $\Delta f(x_0)$ есть функция аргумента Δx.

2°. Определение производной. *Производной* функции f в точке x_0 называется предел отношения приращения $\Delta f(x_0)$ функции f в точке x_0 к Δx при Δx, стремящемся к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Равенство (1) можно записать в виде

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Если функция имеет производную в точке x_0, то говорят, что она *дифференцируема в этой точке*. Функцию, дифференцируемую в каждой точке некоторого промежутка, называют *дифференцируемой в этом промежутке*.

Для существования производной $f'(x_0)$ необходимо, чтобы функция f была определена для всех x из некоторой окрестности точки x_0.

Пример 1. Для функции $g(x) = c$ при $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} = \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Следовательно, $(c)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$

Пример 2. Для функции $g(x) = x$ при $\Delta x \neq 0$ имеем:

$$\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} = \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Следовательно,

$$g'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Производная суммы двух функций равна сумме их производных, если последние существуют:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

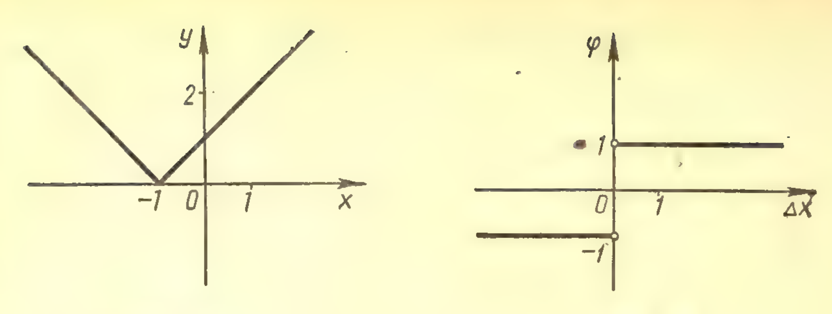


Рис. 196 Рис. 197

Действительно, обозначим $f(x)+g(x)$ через $w(x)$. Тогда

$$\frac{\Delta w(x_0)}{\Delta x}=\frac{w(x_0+\Delta x)-w(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)+g(x_0+\Delta x)-f(x_0)-g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}+\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}.$$

Следовательно,

$$w'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}+\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Пример 3. Функция $h(x)=|x+1|$ (рис. 196) не имеет производной в точке -1. В самом деле, при $\Delta x\neq 0$

$$\frac{\Delta h(-1)}{\Delta x}=\frac{h(-1+\Delta x)-h(-1)}{\Delta x}=\frac{|-1+\Delta x+1|-|-1+1|}{\Delta x}=$$

$$=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1 \text{ при } \Delta x>0,\\ -1 \text{ при } \Delta x<0.\end{cases}$$

Так как функция $\varphi(\Delta x)=\begin{cases}1 \text{ при } \Delta x>0,\\ -1 \text{ при } \Delta x<0\end{cases}$ (рис. 197) не имеет предела при Δx, стремящемся к нулю, то функция $h(x)$ не имеет производной в точке -1.

Если функция f имеет производную в точке x_0, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0.$$

Действительно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

Если считать x_0 переменным, то производная оказывается новой функцией от этой переменной. Производную функцию от функции f обозначают f'. Таким образом, $f'(x_0)$ — значение f' в точке x_0.

3°. **Производная произведения и частного.** Производная произведения двух функций f и g вычисляется по формуле

$$(fg)'=f'g+fg'$$

в предположении, что производные f' и g' существуют (формула Лейбница).

Пример 4. $(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$.

Методом математической индукции можно доказать, что для любого натурального n, $n > 1$,

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

В самом деле, $(c \cdot f(x))' = c' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = 0 \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x)$.

Многочлен есть всюду дифференцируемая функция:

$$(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)' = (a_0x^n)' + (a_1x^{n-1})' + \ldots + (a_n)' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

Если функции f и g имеют в точке x_0 производную и если $g(x_0) \neq 0$, то в этой точке существует производная их частного, которая вычисляется по формуле:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Пример 5. Пусть $\varphi(x) = \frac{x^2}{2x-1}$. Тогда при $x \neq \frac{1}{2}$

$$\varphi'(x) = \frac{(x^2)' \cdot (2x-1) - x^2(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{2x(2x-1 - x^2 \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2}.$$

4°. **Производная сложной функции** $h(x) = g(f(x))$ находится по формуле

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Пример 6. Для функции $h(x) = \sqrt{2-x^2}$ имеем:

$f(x) = 2 - x^2$ и $g(x) = \sqrt{x}$; так как $f'(x) = -2x$ и $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, то

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}.$$

Пример 7. $((x^3-1)^{200})' = 200(x^3-1)^{199} \cdot 3x^2 = 600(x^3-1)^{199} \cdot x^2$.

5°. **Физический смысл производной.** Пусть при движении материальной точки по прямой координата x как функция времени t задается формулой

$$x = s(t).$$

Тогда средняя скорость точки на промежутке времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$ равна $\frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$. Поэтому производная $s'(t_0)$ как предел средней скорости на промежутке $[t_0; t_0 + \Delta t]$ при Δt, стремящемся к нулю, есть мгновенная скорость точки в момент времени t_0:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0).$$

Коротко говорят: *производная от координаты есть скорость.*

Производная функции $v(t)$ в точке t есть *скорость изменения скорости,* т. е. ускорение при данном движении в момент времени t: $a(t) = v'(t)$.

Пример 8. Пусть при движении по прямой координата зависит от времени квадратически:

$$x(t) = pt^2 + qt + c.$$

Тогда $v(t) = x'(t) = 2pt + q$ и $a(t) = v'(t) = 2p$. Следовательно, при данном движении ускорение постоянно и равно удвоенному коэффициенту при t^2.

Пример 9. Пусть вращение тела вокруг оси совершается по закону

$$\varphi(t) = 3t^2 - t^3 + 1 \ (рад).$$

Тогда угловая скорость $\omega(t)$ равна

$$\omega(t) = \varphi'(t) = 6t - 3t^2 \ (рад/сек).$$

Пример 10. Пусть тело массой 3 *кг* движется по прямой согласно уравнению $x(t) = t^3 - 2t^2 - 1$ (координата измеряется в метрах, время в секундах). Его скорость в момент времени t при этом движении $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 4t$, а ускорение $a(t) = v'(t) = 6t - 4$. Следовательно, через 2 секунды после начала движения на тело действует сила

$$F = ma = 3 \cdot (6 \cdot 2 - 4) = 3 \cdot 8 = 24 \ (н).$$

6°. **Геометрический смысл производной.** Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $y_0 = f(x_0)$. Прямая, определяемая уравнением

$$y = y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0), \qquad (1)$$

называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$.

Уравнение (1) можно записать в виде

$$y = kx + b, \text{ где } k = f'(x_0) \text{ и } b = y_0 - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Таким образом, угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$ равен $f'(x_0)$.

Так как секущая, проходящая через точки $(x; f(x))$ и $(x_0; y_0)$, имеет угловой коэффициент $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (рис. 198), а $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то касательная к графику функции есть не что иное, как предельное положение секущей, проходящей через точки $M(x_0; y_0)$ и $M(x; f(x))$ графика функции, когда x стремится к x_0.

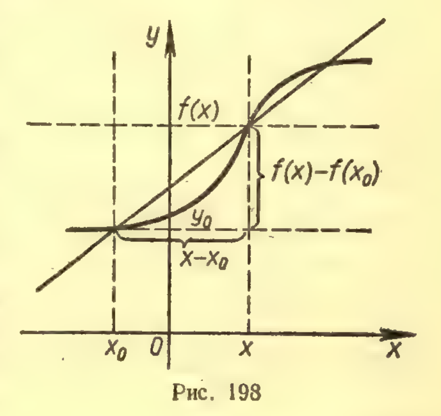


Рис. 198

Пример 11. Написать уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2 + 1$ в точке (1; 5).

Подставляя в уравнение касательной значение $y'(1) = 4 \cdot 1 = 4$, $x_0 = 1$, $y_0 = 5$, получаем

$$y = 5 + 4 \cdot (x - 1) = 4x + 1.$$

Пример 12. Уравнение касательной к гиперболе $y = \frac{1}{x-1}$ в точке $x_0 = 2$ имеет вид $y = -x + 3$.

В самом деле, $y'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$, $y'(2) = -1$, $y(2) = 1, y = y_0 + y'(x_0) \cdot (x - x_0) = 1 - 1\ (x - 2) = -x + 3$.

16. Задачи на экстремум

1°. **Промежутки возрастания (убывания) функции.** Если функция f имеет положительную производную в каждой точке интервала I, то эта функция возрастает на этом интервале I. Если функция f имеет отрицательную производную в каждой точке интервала I, то эта функция f убывает на этом интервале I.

При нахождении промежутков возрастания (убывания) полезно учитывать, что если функция возрастает (убывает) на интервале $]a; b[$ и непрерывна в точках a и b, то она возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$.

Пример 1. Найдем промежутки возрастания (убывания) функции

$$y = 2x^3 - 3x^2.$$

$y' = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$; $y'(x)$ положительна, если $x(x - 1) > 0$, т. е. при $x \in]-\infty; 0[\cup]1; \infty[$; $y'(x)$ отрицательна при $x \in]0; 1[$. Следовательно, функция $2x^3 - 3x^2$ возрастает в промежутках $]-\infty; 0[$ и $]1; \infty[$ и убывает в интервале $]0; 1[$. Далее, $y(x)$ — многочлен, поэтому данная функция непрерывна на всей числовой прямой, в частности в точках 0 и 1. Окончательно получаем, что $y(x)$ возрастает в промежутках $]-\infty; 0]$ и $[1; \infty[$ и убывает на отрезке $[0; 1]$.

2°. **Критические точки функции, ее максимумы и минимумы.** Точка x_0 из области определения функции f называется *точкой минимума* этой функции, если найдется такая δ-окрестность $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0).$$

Точка x_0 из области определения функции f называется *точкой максимума* этой функции, если найдется такая δ-окрестность $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0).$$

Подчеркнем, что точки максимума и минимума (*точки экстремума*) — внутренние точки области определения функции f.

Внутренние точки области определения функции f, в которых производная равна нулю или не существует, называют критическими точками функции.

Точки экстремума функции f являются для нее критическими.

Приведем достаточные условия существования экстремума.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, $f'(x) > 0$ на интервале $]a; x_0[$ и $f'(x) < 0$ на интервале $]x_0; b[$, то точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, $f'(x) < 0$ на интервале $]a; x_0[$ и $f'(x) > 0$ на интервале $]x_0; b[$, то точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$.

Пример 2. Критические точки функции $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$ — точки 0 и —1 (так как $g'(x) = x^3 + x^2$ всюду определена и $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = -1$).

В точке —1 производная меняет знак с «минуса» на «плюс», поэтому точка —1 — точка минимума функции g, точка нуль не является точкой экстремума.

3^0. **Наибольшее и наименьшее значения функции.** Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой в данном промежутке, следует найти все критические точки функции, лежащие внутри промежутка, вычислить значения функции в этих точках и на концах промежутка и из всех полученных таким образом чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

В самом деле, в любой другой точке x_0 производная существует и не равна нулю и, следовательно, в произвольной окрестности этой точки есть точки x_1 и x_2 такие, что

$$f(x_1) > f(x_0) \text{ и } f(x_2) < f(x_0).$$

Пример 3. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x$ на отрезке $[0; 2]$.

Так как $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ или $x = -1$, то критических точек две: —1 и 1. В промежутке $[0; 2]$ лежит лишь одна из них: $x = 1$.

Далее, $f(0) = 0$; $f(1) = -2\frac{2}{3}$; $f(2) = 2\frac{2}{3}$; $\min\limits_{[0;\,2]} f(x) = f(1) = -2\frac{2}{3}$; $\max\limits_{[0;\,2]} f(x) = f(2) = 2\frac{2}{3}$.

Пример 4. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны по 10 *см*. Определить ее большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

Проведем $[BH] \perp [AD]$ (рис. 199). Пусть $|AH| = x$, тогда $|BH| = \sqrt{100 - x^2}$ и $f(x) = S_{ABCD} = 0{,}5\,(|BC| + |AD|) \cdot |BH| = (10 + x)\sqrt{100 - x^2}$.

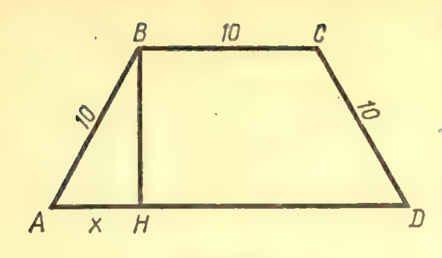


Рис. 199

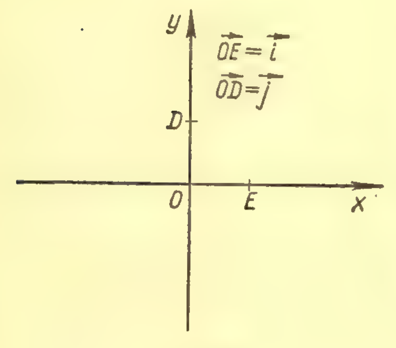


Рис. 200

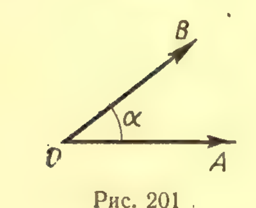


Рис. 201

Рис. 202

Далее,

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} - \frac{2x(10+x)}{2\sqrt{100-x^2}} = \frac{2(50 - 5x - x^2)}{\sqrt{100 - x^2}};$$

$f'(x) = 0$ при $x = -10$ или $x = 5$. Нам нужно найти максимум функции f на отрезке $[0; 10]$. Так как $f(0) = 100$, $f(5) = 75\sqrt{3}$ и $f(10) = 0$, то максимальное значение $f(x)$ на отрезке $[0; 10]$ равно $75\sqrt{3}$ при $x = 5$, при этом $|AD| = 10 + 2x = 20$ (*см*).

17. Теоремы сложения для тригонометрических функций

Пусть на плоскости задана система координат и на осях координат отложены отрезки OE и OD единичной длины. Векторы

$$\vec{i} = \overrightarrow{OE}; \ \vec{j} = \overrightarrow{OD}$$

называют координатными векторами (рис. 200).

Пусть дан вектор $\overrightarrow{OA}$. Повернем точку A вокруг центра O на угол α (рис. 201). Получим точку $B = R_O^\alpha(A)$. Говорят, что вектор $\overrightarrow{OB}$ получен из вектора $\overrightarrow{OA}$ поворотом на угол α:

$$\overrightarrow{OB} = R^\alpha(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OR^\alpha(A)}.$$

В этом определении не важно, как выбрана точка O (рис. 202). При повороте R^α вектора

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'}$$

на угол α получается вектор

$$\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}.$$

Обозначим через $\vec{e}_\alpha$ вектор $R^\alpha(\vec{i})$. Тогда по определению его координаты равны $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, поэтому $\vec{e}_\alpha = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$ (рис. 203).

В дальнейшем будут использованы следующие соотношения:

а) для любого вектора $\vec{a}$ и любого действительного числа k верно равенство $R^{\alpha}(k\vec{a}) = kR^{\alpha}(\vec{a})$ для $\alpha \in \boldsymbol{R}$;

б) для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $R^{\alpha}(\vec{a}+\vec{b}) = R^{\alpha}(\vec{a}) + R^{\alpha}(\vec{b})$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$;

в) для любых α и β $R^{\alpha+\beta}(\vec{a}) = R^{\alpha}(R^{\beta}(\vec{a}))$ (рис. 204);

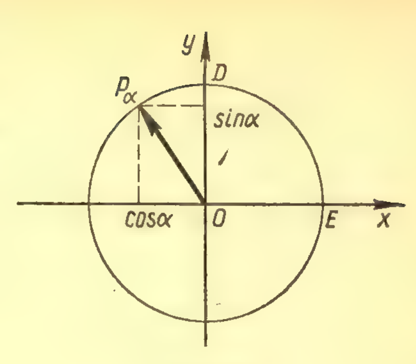


Рис. 203

г) $R^{\frac{\pi}{2}}(\vec{i}) = \vec{j}$; $R^{\frac{\pi}{2}}(\vec{j}) = -\vec{i}$ (рис. 205).

2⁰. Косинус и синус суммы. Из формулы

$$\vec{e}_{\alpha} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j} \qquad (1)$$

вытекает $R^{\alpha}(\vec{j}) = R^{\alpha}(R^{\frac{\pi}{2}}(\vec{i})) = R^{\frac{\pi}{2}}(R^{\alpha}(\vec{i})) = R^{\frac{\pi}{2}}(\cos\alpha \cdot \vec{i} +$

$+ \sin\alpha \cdot \vec{j}) = \cos\alpha \cdot R^{\frac{\pi}{2}}(\vec{i}) + \sin\alpha \cdot R^{\frac{\pi}{2}}(\vec{j}) = \cos\alpha \cdot \vec{j} - \sin\alpha \cdot \vec{i}.$

Следовательно,

$$R^{\alpha}(\vec{j}) = -\sin\alpha \cdot \vec{i} + \cos\alpha \cdot \vec{j}. \qquad (2)$$

Заметим теперь, что, с одной стороны,

$$\vec{e}_{\alpha+\beta} = \cos(\alpha+\beta) \cdot \vec{i} + \sin(\alpha+\beta) \cdot \vec{j}, \qquad (3)$$

с другой стороны,

$\vec{e}_{\alpha+\beta} = R^{\beta}(\vec{e}_{\alpha}) = R^{\beta}(\cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j}) = \cos\alpha \cdot R^{\beta}(\vec{i}) + \sin\alpha \cdot R^{\beta}(\vec{j})$

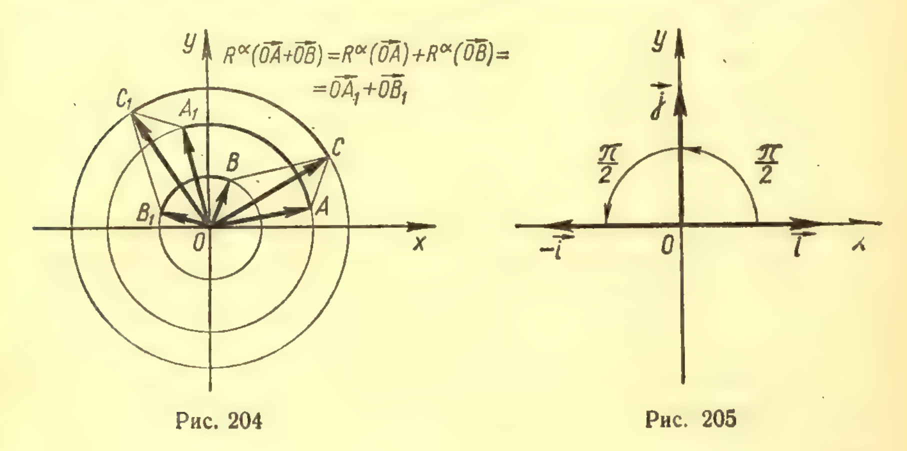


Рис. 204

Рис. 205

Далее, в силу равенств (1) и (2) $\vec{e}_{\alpha+\beta} = \cos\alpha\,(\cos\beta\cdot\vec{i} + \sin\beta\times$
$\times\,\vec{j}) + \sin\alpha\,(-\sin\beta\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j})$. (4)

Сравнивая равенства (3) и (4), получаем

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta,\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta.\end{aligned} \quad (5)$$

Эти формулы и выражают *теоремы сложения.*

Пример 1. Найдем $\cos 75°$, $\sin 75°$, $\operatorname{tg} 75°$.

$$\cos 75° = \cos(30° + 45°) = \cos 30°\cos 45° - \sin 30°\sin 45° =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1),$$
$$\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \sin 30°\cos 45° + \cos 30°\sin 45° =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1),$$
$$\operatorname{tg} 75° = \frac{\sin 75°}{\cos 75°} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3}.$$

Пример 2. Найдем косинус и синус разности.

Так как $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, то по формуле (5) получаем $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) - \sin\alpha\cdot\sin(-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$. Окончательно получаем:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta,\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta.\end{aligned}$$

Пример 3. Найдем тангенс суммы и тангенс разности.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta} =$$
$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}. \quad (6)$$

Заменяя в этой формуле β на $-\beta$ и учитывая нечетность тангенса, получаем

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}. \quad (7)$$

В формуле (6) α, β, $\alpha+\beta$ не являются числами вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1^0. **Тождества сокращенного умножения.** Для любых действительных чисел a и b верны следующие равенства:

а) $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ (разность квадратов);

б) $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$ (разность кубов);

в) $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$ (сумма кубов);

г) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (квадрат двучлена);

д) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ (куб двучлена).

2^0. **Сравнение среднего арифметического и среднего геометрического.** Средним арифметическим чисел a и b называют число $\frac{a+b}{2}$.

Средним геометрическим чисел a и b ($a > 0$, $b > 0$) называют число $\sqrt{ab}$.

Для любых положительных чисел a и b верно неравенство:

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

3^0. **Неравенство Бернулли.** При $h > -1$ ($h \in R$) для любого натурального n верно неравенство $(1 + h)^n \geqslant 1 + nh$.

4^0. **Арифметическая прогрессия.** Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же числом d, называют арифметической прогрессией. Это число d называют разностью арифметической прогрессии.

Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого $n > 1$ верно равенство:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Для арифметической прогрессии (a_n)

$$a_n = a_1 + (n-1)d; \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n,$$

где d — разность прогрессии, а S_n — сумма ее первых n членов.

5^0. **Понятие степени.** При натуральном $n > 1$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}.$$

При $n = 1$

$$a^n = a^1 = a.$$

При $n = 0$ и $a \neq 0$

$$a^n = a^0 = 1.$$

При $n \in \mathbf{Z}$, $n < 0$ и $a \neq 0$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

При $n \in \mathbf{Q}$, т. е. $n = \frac{p}{q}$, где $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$ и $a > 0$,

$$a^n = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

6^0. **Формула Ньютона.** При любом натуральном n

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n b^n.$$

7^0. **Геометрическая прогрессия.** Числовую последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же, не равное нулю, число q, называют геометрической прогрессией. Это число q называют знаменателем геометрической прогрессии.

Последовательность (b_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого $n > 1$ верно равенство:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Для геометрической прогрессии (b_n)

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}; \quad S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1},$$

где q — знаменатель прогрессии, а S_n—сумма ее первых n членов.

Сумма бесконечной геометрической прогрессии (b_n) при $|q| < 1$ равна $\frac{b_1}{1-q}$, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$.

8^0. **Длина дуги. Площадь сектора.** Длина дуги в α радианов равна αR (R — радиус дуги).

Длина окружности C радиуса R выражается формулой

$$C = 2\pi R.$$

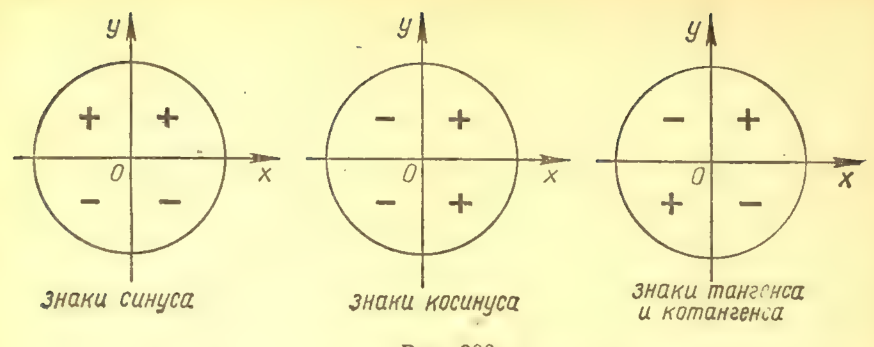


Рис. 206

Площадь сектора, дуга которого содержит α радианов, равна $\frac{\alpha R^2}{2}$ (R — радиус круга).

Площадь S круга радиуса R выражается формулой

$$S = \pi R^2.$$

9°. Знаки значений тригонометрических функций (рис. 206).

10°. Формулы двойных аргументов тригонометрических функций:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,\quad m\in \boldsymbol{Z},\ \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

11°. Представление суммы одноименных тригонометрических функций в виде произведения:

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

12°. Тригонометрические функции суммы и разности двух аргументов:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

13°. Формулы приведения.

u	$\sin u$	$\cos u$	$\operatorname{tg} u$	$\operatorname{ctg} u$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

14°. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

Дано	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha=a$	a	$\pm\sqrt{1-a^2}$	$\pm\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$
$\cos\alpha=a$	$\pm\sqrt{1-a^2}$	a	$\pm\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$\pm\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$
$\operatorname{tg}\alpha=a$	$\pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	a	$\frac{1}{a}$
$\operatorname{ctg}\alpha=a$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	$\pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\frac{1}{a}$	a

15°. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta));$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta));$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).$$

16°. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента.

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}.$$

17°. Формулы дифференцирования:

$(C)' = 0;$

$(x)' = 1;$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},\ \alpha \neq 1;$

$(\sin x)' = \cos x;$

$(\cos x)' = -\sin x;$

$(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$

$(\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$

$(a^x)' = a^x \ln a;$

$(e^x)' = e^x;$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$

$(\ln x)' = \frac{1}{x};$

$(f+g)' = f' + g';$

$(f \cdot g)' = f'g + fg';$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2};$

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$

18°. Первообразные.

$f(x)$	$x^a,\ a \neq -1$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{x},\ x > 0$	$\frac{1}{x},\ x < 0$	e^x	a^x
$F(x)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\mathrm{tg}\,x + C$	$-\mathrm{ctg}\,x + C$	$\ln x + C$	$\ln(-x) + C$	$e^x + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ ВСЕГО КУРСА

Укажите верные цифры в записи приближенного значения числа x:

924. $3{,}83 \pm 0{,}01$.

925. $1{,}380 \cdot 10^4 \pm 0{,}001 \cdot 10^4$.

926. $7{,}441 \pm 0{,}1$.

927. $2{,}3 \cdot 10^{-5} \pm 0{,}2 \cdot 10^{-5}$.

928. Вычислите $a + b \cdot c$, если $a \approx 3{,}71$; $b \approx 0{,}017$; $c \approx 2{,}3199$.

929. Пользуясь формулой $(1+x)^n \approx 1 + nx$, вычислите $1{,}002^5$; $2{,}006^3$; $3{,}001^4$.

930. Докажите, что $\sqrt{7}$ не является рациональным числом.

931. Найдите сумму чисел $\sqrt{2}$ и $\frac{19}{17}$ с точностью до 0,01.

932*. Докажите, что lg 3 не является рациональным числом.

933. Вычислите без таблиц $\lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$.

934. Что больше: а) $\dfrac{4}{\lg\frac{1}{2}}$ или $\dfrac{7}{\lg\frac{1}{2}}$; б) $15^{\log_5 10}$ или $10^{\log_5 15}$?

935. Дано: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. Найдите $f\left(\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a-1}\right)$.

Докажите равенство:

936. $\dfrac{1}{4\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 6} + \dfrac{1}{6\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(n+3)(n+4)} = \dfrac{n}{4(n+4)}$.

937. $2^2 + 6^2 + \ldots + (4n-2)^2 = \dfrac{4n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

938*. $\dfrac{7}{1\cdot 8} + \dfrac{7}{8\cdot 15} + \dfrac{7}{15\cdot 22} + \ldots + \dfrac{7}{(7n-6)(7n+1)} + \dfrac{1}{7n+1} = 1$.

939*. $\dfrac{1}{4\cdot 8} + \dfrac{1}{8\cdot 12} + \dfrac{1}{12\cdot 16} + \ldots + \dfrac{1}{4n(4n+4)} + \dfrac{1}{16(n+1)} = \dfrac{1}{16}$.

940. Докажите, что при $n \in N$ $7^{2n} - 1$ делится на 48.

Докажите неравенство:

941*. $|\sin nx| \leqslant n\,|\sin x|$.

942*. $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1} > 1$.

943. Найдите седьмой член разложения: $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{11}$.

944. Найдите четвертый член разложения: $(\sqrt{2a} - \sqrt{ab})^7$.

945. Двенадцати ученикам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами их можно посадить в два ряда, чтобы рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

946. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составляются всевозможные пятизначные числа, не содержащие одинаковых цифр. Сколько среди них чисел, содержащих цифры 2, 4 и 5 одновременно?

947. Какой четверти принадлежит угол:

$1200°$; $-1000°$; $3{,}5\pi$; $-15\frac{2}{5}\pi$; $\alpha + \frac{2}{3}\pi$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

$\alpha - \pi$, если α — угол III четверти; $\alpha - 3\pi$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$?

948. Какой четверти принадлежит число x, если:
$\sin x = 4\cos x$; $\sin x - \cos x = 1{,}2$?

949. Вычислите $\dfrac{\sin 110° \cdot \sin 250° + \cos 540° \cdot \cos 290° \cdot \cos 430°}{\cos^2 1260°}$.

950. Найдите $\sin x$, если $\cos x = \dfrac{1-m}{1+m}$ и $m > 0$.

951. Вычислите $\cos x$, если $\sin x = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

952. Вычислите $\cos x$, если $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$.

953. Вычислите $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

954. Вычислите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}$.

955. Вычислите без таблиц с точностью до 0,001 значение $\sin 46°$, если $\cos 32° = 0{,}848$.
Указание. $\sin 46° = \sin (30° + 16°)$.

956. Дано: $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \alpha > 0$. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$.

957. Два куска латуни имеют массу 30 *кг*. Первый кусок содержит 5 *кг* чистой меди, а второй кусок 4 *кг*. Сколько процентов меди содержит первый кусок латуни, если второй содержит меди на 15% больше первого?

958. Время, затрачиваемое автобусом на прохождение расстояния 325 *км*, в новом расписании движения автобусов сокращено на 40 *мин*. Найдите среднюю скорость движения автобуса по новому расписанию, если она на 10 *км/ч* больше средней скорости, предусмотренной старым расписанием.

959. Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде равна 15 *км/ч*, прошла вниз по течению $139\frac{1}{3}$ *км* и вернулась обратно. Определите скорость течения реки, если на весь путь затрачено 20 *ч*.

960. Поезд должен был пройти 220 *км* за определенное время. Через 2 *ч* после начала движения он был задержан на 10 *мин*, и, чтобы прийти вовремя в пункт назначения, он увеличил скорость на 5 *км/ч*. Найдите первоначальную скорость поезда.

961. Две бригады комсомольцев, работая совместно, закончили посадку деревьев на учебно-опытном участке за 4 дня. Сколько дней потребовалось бы на выполнение этой работы каждой бригаде отдельно, если одна из бригад могла бы закончить посадку деревьев на 6 дней скорее другой?

962. Огородный участок, имеющий форму прямоугольника, одна сторона которого на 10 *м* больше другой, требуется обнести изгородью. Найдите длину изгороди, если известно, что площадь участка равна 1200 $м^2$.

963. Какой многоугольник имеет число диагоналей на 12 больше числа его сторон?

964. К раствору, содержащему 40 *г* соли, добавили 200 *г* воды, после чего его концентрация уменьшилась на 10%. Сколько воды содержал раствор и какова была его концентрация?

965. Водонапорный бак наполняется двумя трубами за 2 *ч* 55 *мин*. Первая труба может его наполнить на 2 *ч* скорее, чем вторая. За сколько времени каждая труба, действуя отдельно, может наполнить бак?

966*. По окружности, длина которой 60 *м*, равномерно и в одном направлении движутся 2 точки. Одна делает полный оборот на 5 *сек* скорее другой и при этом догоняет вторую точку каждую минуту. Определите скорости точек.

967. Из шахматного турнира двое участников выбыли, причем один сыграл 10 партий, а второй — только одну. Поэтому в турнире было сыграно всего 55 партий. Найдите, сколько было участников в турнире первоначально, и определите, сыграли ли выбывшие участники между собой.

968. На строительстве Байкало-Амурской магистрали (БАМ) бригада строителей за несколько дней должна была по плану переместить 2160 $м^3$ грунта. Первые 3 дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день перевыполняла норму на 80 $м^3$; поэтому уже за день до срока бригада переместила 2320 $м^3$ грунта. Какова по плану дневная норма бригады?

969. В двузначном числе цифра единиц на 2 больше цифры десятков. Само число больше 30 и меньше 40. Найдите это число.

970. Из двух жидкостей, плотность которых соответственно 1,2 $г/см^3$ и 1,6 $г/см^3$, составлена смесь массой в 60 *г*. Сколько граммов взято каждой жидкости и какова плотность смеси, если ее 8 $см^3$ имеют массу такую же, как масса всей менее тяжелой из смешанных жидкостей?

971. Докажите, что последовательность (x_n) возрастает, а (y_n) убывает, если:

а) $x_n = \frac{6n-5}{2n}$; в) $y_n = \frac{1}{n^2-2n+3}$;

б) $x_n = \frac{(n+1)!}{2^n}$; г) $y_n = \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}\right) \cdot (n+2)$.

972. Докажите, что последовательности ограничены:

а) $u_n = \frac{3n+8}{2n}$; б) $a_n = \frac{(-1)^n}{2}$; в) $b_n = 2^{(-1)^n}$; г) $c_n = \frac{3+n^2}{1+n^2}$.

973. Докажите, что последовательность $\left(\frac{3n+2}{2n-1}\right)$ имеет предел.

974. Вычислите пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-2)(7-n)}{2n^2+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{2+3n} - \frac{n^2+1}{3n^2+2n}\right)$.

975. Запишите в виде обыкновенной дроби:

а) 1,2(27); б) 2,(41); в) 0,(428571); г) 0,3(148).

976. Найдите сумму членов бесконечной геометрической прогрессии:

а) $b_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$; в) $b_n = \left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)^n$ при $a \neq b$;

б) $b_n = \left(\frac{1}{2}\sin x\right)^n$; г) $b_n = (\operatorname{tg} x)^n$, где $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

977. Решите неравенство:

а) $x^2 - 14x + 15 > 0$; в) $3x^2 - 5x - 2 \leqslant 0$;
б) $x^2 - 3x + 5 \geqslant 0$; г) $2x^2 - 9x - 3 < 0$.

Найдите область определения функции:

978. $y = \lg(3x^2 - 4x + 5)$.

979. $y = \lg(5x^2 - 8x - 4)$.

980. $f(x) = \sqrt{3x^2 - 4x + 5}$.

981. $f(x) = \sqrt{6 + 7x - 3x^2}$.

982. Заданы корни квадратного уравнения $x_1 = 1 - \sqrt{3}$; $x_2 = 1 + \sqrt{3}$. Напишите уравнение.

983. Найдите сумму кубов корней уравнения $x^2 + 2x - 2 = 0$.

984. Найдите с помощью производной координаты вершины параболы: а) $y = 3x^2 + 6x + 20$; б) $y = 2x^2 - 8x + 5$.

985. Какой вектор переводит параболу $y = 2x^2$ в параболу $y = 2(x - 3)^2$?

986. Напишите уравнение параболы, получающейся из параболы $y = -2x^2$ с помощью следующих двух преобразований: а) сжатия к оси Oy в отношении 1 : 2; б) параллельного переноса $\vec{r}(0; 2)$.

987. Напишите уравнение параболы, которая получится из параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ параллельным переносом $\vec{r}(-2; 3)$.

988. Напишите уравнение гармонического колебания, график которого получится из графика уравнения $y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ с помощью следующих трех преобразований:

а) сжатия к оси Oy в отношении 1 : 3;

б) параллельного переноса $\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$;

в) сжатия к оси Ox в отношении $1 : \frac{1}{2}$.

989. По графику функций, изображенных на рисунках 207—210, ответьте на вопросы:

1. Каковы промежутки возрастания функции?
2. Каковы промежутки убывания функции?
3. Укажите точки, в которых функция имеет максимум или минимум. Какие значения принимает функция в этих точках?
4. Какие наибольшее и наименьшее значения этих функций на отрезке [—2; 2]?
5. В каких точках функции разрывны и каковы значения функций в этих точках?
6. Укажите промежутки непрерывности функций.
7. Укажите точки, в которых производная равна нулю.
8. Какие из функций могут быть периодическими с периодом, меньшим 3, чему равен их наименьший положительный период?
9. Какие из этих функций четные и какие нечетные?

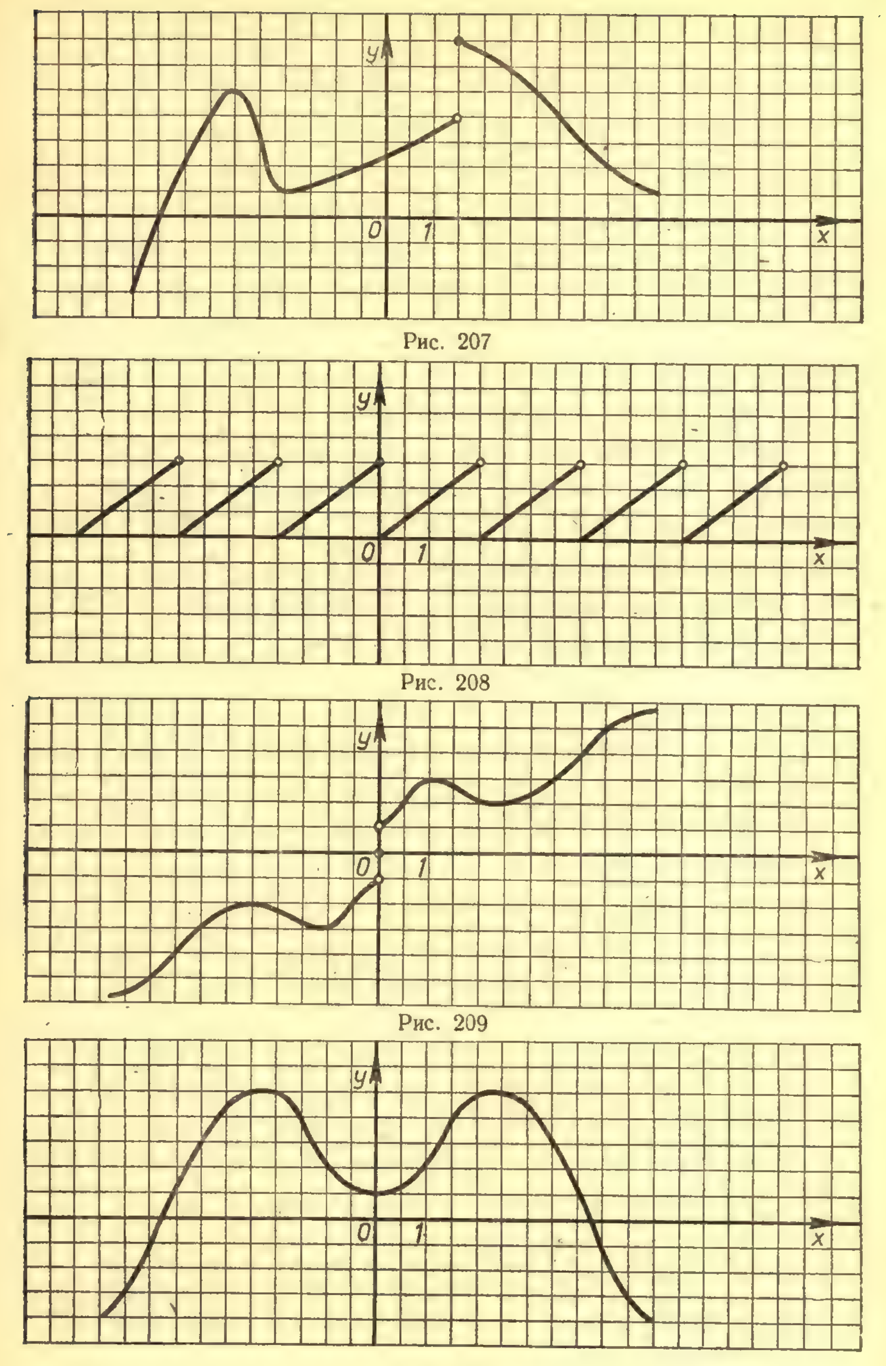


Рис. 207

Рис. 208

Рис. 209

Рис. 210

Исследуйте функцию и постройте ее график:

990. $y = (x-1)^3 - 3(x-1)$. **991.** $y = \frac{8}{x} + \frac{x}{2}$.

Постройте график функции:

992. а) $y = 2\lg(x-2)$; б) $y = 3\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+1$.

993. $y = \frac{3}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$.

994. $y = \frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x\cdot\cos x}$. **995.** $y = 2\cdot\frac{5-x}{x-3}$.

996. а) $y = \{1{,}5x-1\}$; б) $y = \{1{,}5(x-1)\}$.

997. а) $y = |\sin x\cdot\operatorname{ctg} x|$; б) $y = \left|\frac{\operatorname{ctg} x}{\frac{1}{\sin x}}\right|$.

998. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $f(x) = 3\{x+0{,}25\}+1$; б) $g(x) = \{1-2x\}$.

999. Найдите наименьший положительный период функции

$$y = \sin 1{,}5x + 5\cos 0{,}75x.$$

1000. Исследуйте на четность или нечетность функцию:

а) $y = \cos\frac{x^2-x}{x-1}$; д) $y = x^3\sin x$;

б) $y = \sin\frac{x^3-x}{x^2-1}$; е) $y = x^3-x^2$;

в) $y = \sin\frac{x^3-x^2}{x-1}$; ж) $y = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$;

г) $y = \operatorname{tg}\frac{3x^3-x^2}{3x-1}$; з) $y = \lg\left|\frac{3+x}{3-x}\right|$.

1001. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{\cos 4x}{\sin 2x-\cos 2x}$.

1002. Докажите, что функция $y = \sin x$ непрерывна в любой точке ее области определения.

1003. Найдите производную функции:

а) $y = 2x^6-3{,}8x^5+x-\sqrt{2}$;

б) $y = \frac{3-2x}{x+1}$;

в) $y = (x+1)\sin x - x\cos^2 x$;

г) $y = 2\operatorname{tg} x\cdot\lg x$.

1004. Найдите производную функции $y = \frac{45x^4-30x^2}{(8x^2-3)^2}$.

1005. Путь s (в метрах) точки M в зависимости от времени t (в минутах) выражается формулой $s = 2t^3+6t-1$. Найдите скорость и ускорение точки M в момент времени $t = 3$ *мин*.

1006. Докажите, что функция $\varphi(x) = -0{,}2x^5 + 0{,}5x^4 - x^3 + x^2 - x$ убывает на всей области определения.

1007. Напишите уравнения касательных к графику функции $y = x^2 + 2x$ в точках пересечения этого графика с осью абсцисс и в точке $x = 1{,}5$.

Задайте формулой функцию, обратную функции $y = f(x)$. Для обратной функции укажите область определения и множество значений, выясните, возрастает она или убывает, если:

1008. $y = \frac{2x-3}{3}$.

1009. $y = \frac{1}{x-1}$.

1010. $f(x) = \frac{2x+1}{3-x}$.

1011. $f(x) = 2^x + 1$.

1012. $y = \log_3(x+2)$.

1013. $f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$.

Для указанных ниже функций найдите промежутки возрастания (убывания) и точки максимума и минимума:

1014. $y = \frac{2x+1}{1-3x}$.

1015. $y = \frac{2x-1}{2-4x}$.

1016. $y = 2^{x^2-4x}$.

1017. $y = xe^x$.

1018. $y = \frac{\ln x}{x}$.

1019. $y = x - \ln x$.

1020. $y = x\ln x$.

1021. $y = \frac{e^x}{x+1}$.

1022. $y = 2\sin x + 3\cos x$.

1023. $y = -2\cos x + \cos 2x$.

Докажите возрастание функции на всей числовой прямой:

1024. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 21$. **1025.** $y = 0{,}8x^5 - x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x$.

Найдите наибольшее значение функции на R:

1026. $y = 18x^2 + 8x^3 - 3x^4$. **1027.** $y = -2x^4 + 3x^2 - 6$.

1028. Какое положительное число, будучи сложено с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?

1029. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 *см*^{3}, причем стороны основания относились бы как 1 : 2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

1030. На окружности дана точка A. Провести хорду BC параллельно касательной в точке A так, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей.

1031. Каков должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим?

1032. Объем правильной треугольной призмы равен V. Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

1033. Требуется изготовить коническую воронку с образующей $l = 20$ *см*. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

1034. Найдите высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

1035. В прямой круговой конус, радиус основания которого R и высота H, требуется вписать цилиндр, имеющий наибольшую полную поверхность. Найдите радиус цилиндра r.

1036. Около данного цилиндра описать конус наименьшего объема (плоскости оснований цилиндра и конуса совпадают).

1037. Найдите высоту H прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

1038. Найдите высоту H конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиуса R, так чтобы центр основания конуса лежал в центре шара.

1039. Из круглого бревна диаметра 40 *см* требуется вырезать балку прямоугольного сечения с основанием b и высотой h. Прочность балки пропорциональна bh^2. При каких значениях b и h прочность балки будет наибольшей?

1040. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Определите размеры окна при заданном периметре, имеющего наибольшую площадь.

1041. По двум улицам движутся к перекрестку две машины с постоянными скоростями 40 *км/ч* и 50 *км/ч*. Считая, что улицы пересекаются под прямым углом, и зная, что в некоторый момент времени автомашины находятся от перекрестка на расстояниях 2 *км* и 3 *км* (соответственно), определите, через какое время расстояние между ними станет наименьшим.

1042. Картина в 1,4 *м* высотой повешена на стену так, что ее нижний край на 1,8 *м* выше глаза наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен стать наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятно для осмотра картины (т. е. чтобы угол зрения по вертикали был наибольшим)?

1043. Статуя высотой 4 *м* стоит на колонне, высота которой 5,6 *м*. На каком расстоянии должен стать человек ростом (до уровня глаз) 1,6 *м*, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

1044. Три пункта A, B, C расположены не на одной прямой: $\widehat{ABC} = 60°$. Одновременно из точки A выходит автомобиль, а из точки B — поезд. Автомобиль движется по направлению к B со скоростью 80 *км/ч*, поезд к пункту C — со скоростью 50 *км/ч*. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если $|AB| = 200$ *км*?

1045. На странице текст должен занимать 384 *см*². Верхнее и нижнее поля должны быть по 3 *см*, правое и левое по 2 *см*. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

1046. Вычислите:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\, dx$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 3x - \sin 2x)\, dx$.

1047. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

а) $y = 0{,}5x^2 - 3x + 2$ и $y = x - 4$;
б) $y = x^2 - 5x + 4$ и $y = 2x - 2$;
в) $y = 8 - \frac{1}{2}x^2$ и $y = 3{,}5$;
г) $y = x^2 - 3x + 4$ и $y = x + 1$;
д) $y = \frac{5}{x}$ и $y = 6 - x$.

1048. Решите неравенство:

а) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} > 0$; в) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 8} \geqslant 0$;
б) $\frac{(x-3)(x-5)}{x-2} < 0$; г) $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 5x - 6} < 0$;
д) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) < 0$;
е) $x^4 - 3x^2 + 2 \leqslant 0$.

1049. Расходы на топливо для парохода делятся на две части. Первая из них не зависит от скорости и равна 480 рублям в час. А вторая часть расходов пропорциональна кубу скорости, причем при скорости 10 *км/ч* эта часть расходов равна 30 рублям в час. Требуется определить, при какой скорости общая сумма расходов на 1 километр пути будет наименьшей.

Найдите первообразную функции:

1050. $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

1051. $f(x) = \sqrt{2x}$.

1052. $f(x) = 2\sin x + \cos 3x$.

1053. $f(x) = x^{-5} + x^{-2}$.

1054. $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}$.

1055. $f(x) = \frac{3}{x+4}$.

1056. $f(x) = \frac{2}{3\sin^2 2x}$.

1057. $f(x) = \frac{3}{\cos^2 2x}$.

1058. $f(x) = 2x + 3x^2$.

1059. $f(x) = x^{3+\sqrt{2}}$.

1060. Найдите функцию, производная которой равна $2x - 3$ и значение функции в точке 2 равно 2.

1061. Материальная точка движется по прямой со скоростью $v(t) = \sin t \cos t$. Найдите уравнение движения точки, если при $t = \frac{\pi}{4}$ пройденный путь равен 3 *м*.

1062. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку (2; 3), если угловой коэффициент ее касательной в точке x равен $3x^2$.

1063. Докажите, что $\sin(\alpha + \pi k) = (-1)^k \sin\alpha$.

1064. Докажите тождество

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \text{ если } \pi < \alpha < 2\pi.$$

1065. Представьте в виде произведения:

а) $\frac{1}{2} + \sin 20^\circ + \sin 10^\circ$;

б) $\cos\alpha + \cos\beta - \sin(\alpha+\beta)$;

в) $\sin x + \sin 6x - \sin 5x$;

г) $1 - \cos 1 + \sin 1$.

Докажите следующие формулы приведения:

1066. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$.

1067. $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$.

1068. $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$.

1069. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$.

1070. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$.

1071. $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$.

1072. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$.

1073. $\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha$.

Упростите:

1074. $\dfrac{x-1}{x + x^{\frac{1}{2}} + 1} : \dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1} + \dfrac{2}{x^{-0,5}}$.

1075. $t \cdot \dfrac{1 + \dfrac{2}{\sqrt{t+4}}}{2 - \sqrt{t+4}} + \sqrt{t+4} + \dfrac{4}{\sqrt{t+4}}$.

1076. $\dfrac{1 - a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} - \dfrac{2}{a^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{a^{-2} - a}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}$.

1077. $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$.

1078. Докажите, что $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ делится на 24 при $n \in N$.

Докажите неравенство:

1079. $m + \frac{4}{m} \geqslant 4$, $m > 0$.

1080. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$, $a > 0$, $b > 0$.

1081. $\frac{2m}{1+m^2} \leqslant 1.$ 1082. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqslant 2, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

1083. Докажите неравенство

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\alpha}{4}\right)} + 2\sin\frac{\alpha}{2} \leqslant 2\sqrt{3}.$$

1084. Докажите неравенство

$$(1+\sin\varphi+\cos\varphi)(1-\sin\varphi+\cos\varphi)(1+\sin\varphi-\cos\varphi)\times$$
$$\times(\sin\varphi+\cos\varphi-1) \leqslant 1.$$

Решите уравнение:

1085. $\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} - \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = 3.$

1086. $\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{2+x}} + \sqrt{2+x} = 0.$

1087. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} 5x \cdot \cos x = 0;$ в) $\sin 2x + \sin 3x = 0;$

б) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} \cdot \cos x = 0;$ г) $\sin x + \cos 2x = 0.$

1088. Решите уравнение:

а) $3\sin 3x + 4\cos 3x = -5;$
б) $-5\sin 2x + 12\cos 2x = -13.$

1089. Решите уравнение:

а) $4\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) + 12\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = 11;$

б) $4\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right) + 7\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{2}\right) = 7\frac{1}{4};$

в) $|2x-5| = |7-2x|;$
г) $|x-2| = 2|3-x|;$
д) $x^2 - 3|x| + 2 = 0;$
е) $x^2 + |x| - 2 = 0.$

Решите неравенство:

1090. $|3x-2{,}5| \geqslant 2.$

1091. $|5-2x| < 1.$

1092. $|x|^2 - 4|x| + 3 > 0.$

1093. $2x^2 - 5|x| + 3 \geqslant 0.$

1094. $\frac{x+2}{x+3} > 3.$

1095. $\frac{1-3x}{1-2x} < 1.$

1096. $\frac{3x}{2+x} > 2.$

1097. $\frac{3-x}{x-4} < \frac{2}{3}.$

Решите систему:

1098. $\begin{cases} 2(3x-1) < 3(4x+1)+16 \\ 4(2+x) < 3x+8. \end{cases}$

1099. $\begin{cases} 2x > 3 - \frac{13x-2}{11} \\ \frac{x}{6} + \frac{2}{3}(x-7) < \frac{3x-20}{9}. \end{cases}$

1100. $\begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} \geqslant \frac{x-1}{4} - x - 2 \\ 0,5x < 2 - x. \end{cases}$

1101. $\begin{cases} x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+4}{3} \leqslant \frac{x-1}{4} - 2 \\ 1,5x - 2,5 < x. \end{cases}$

1102*. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

1103*. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

1104*. Докажите, что две любые параболы подобны.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава VI

1. $3\cos 3x$. **2.** $-\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x$. **3.** $-\sin x$. **4.** $6\sin(4x-2)$. **5.** $\cos t$. **6.** 0. **7.** 0. **8.** $2\cos(2x-3{,}5)+2\cos 2x$. **9.** $2+18\sin^4 x\cos x$. **10.** $-2\cos 2u$. **11.** $f'(x)=2-\cos x$ положительна для всех $x\in R$. **12.** $x=2\pi k$, $k\in Z$. **14.** $g'(x)=2\cos(2x-5)-3<0$ для любого $x\in R$. **15.** $-1{,}3\sin x$. **16.** $-6{,}9\times\sin 2{,}3x$. **17.** $-0{,}5\sin x$. **18.** $4x+150\sin(5x+6)$. **19.** $-2\sin x+4\cos 2x$. **20.** $\frac{10}{\cos^2(2x+3)}$. **21.** $\frac{1}{\cos^2(2x+1)}$. **22.** $\frac{18}{\cos^2(6x+3)}$. **23.** $3\cos 3u$. **24.** $-3\sin 3t$. **25.** $-\frac{8}{\sin^2(2t+3)}$. **26.** $\frac{-14}{\sin^2 2x}$. **27.** $-2{,}5\sin 2{,}5x$. **28.** $-4\cos 4x$. **30.** $y=x+\frac{\pi}{2}$, $y=1$. **31.** $y=x$, $y=2x+1-\frac{\pi}{2}$. **32.** 0. **33.** 1. **34.** 1. **35.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **36.** 0. **37.** 1. **38.** 1. **39.** 0. **42.** 4. **43.** 1,25. **44.** 1. **45.** 1,2. **46.** а) Убывает замедленно на $]-\pi;-\frac{\pi}{2}[$; б) возрастает ускоренно на $]-\frac{\pi}{2};0[$; возрастает замедленно на $]0;\frac{\pi}{2}[$; (0; 0) — точка перегиба. **47.** в) Возрастает замедленно на $]-\frac{\pi}{2};0[$; возрастает ускоренно на $]0;\frac{\pi}{2}[$; (0; 0) — точка перегиба. **48.** $y=x$ и $y=\pi-x$. **49.** $y=x$ и $y=x+\pi$. **50.** а) $f''(x)=-2<0$ на $]-\infty;\infty[$; б) $g''(x)=12>0$ на $]-\infty;\infty[$. **51.** $f''(x)=-6+6x$. **52.** $y=3{,}5\cos\left(\frac{4}{3}t+\frac{\pi}{3}\right)$. **54.** $2\cos\left(x+\frac{5\pi}{3}\right)$. Амплитуда равна 2, период $T=2\pi$; начальная фаза $\varphi=\frac{5\pi}{3}$, частота $\omega=1$. **55.** $y=3\cos\left(2x+\frac{5\pi}{3}\right)$. **56.** Например, $y=3{,}1\cos(5x+2)$. **57.** Является. **59.** Да. **68.** $5\cos(4x-2)-3$. **71.** $\sin 1^\circ$. **72.** $\cos 19^\circ$. **73.** $\operatorname{ctg} 22^\circ$. **74.** $\operatorname{tg} 43^\circ$. **75.** $\cos 41^\circ 48'$. **76.** $\sin 11'$. **77.** $-\sin 18^\circ$. **78.** $\sin 18^\circ$. **79.** $\cos 25^\circ 12'$. **80.** $-\cos 18'$.

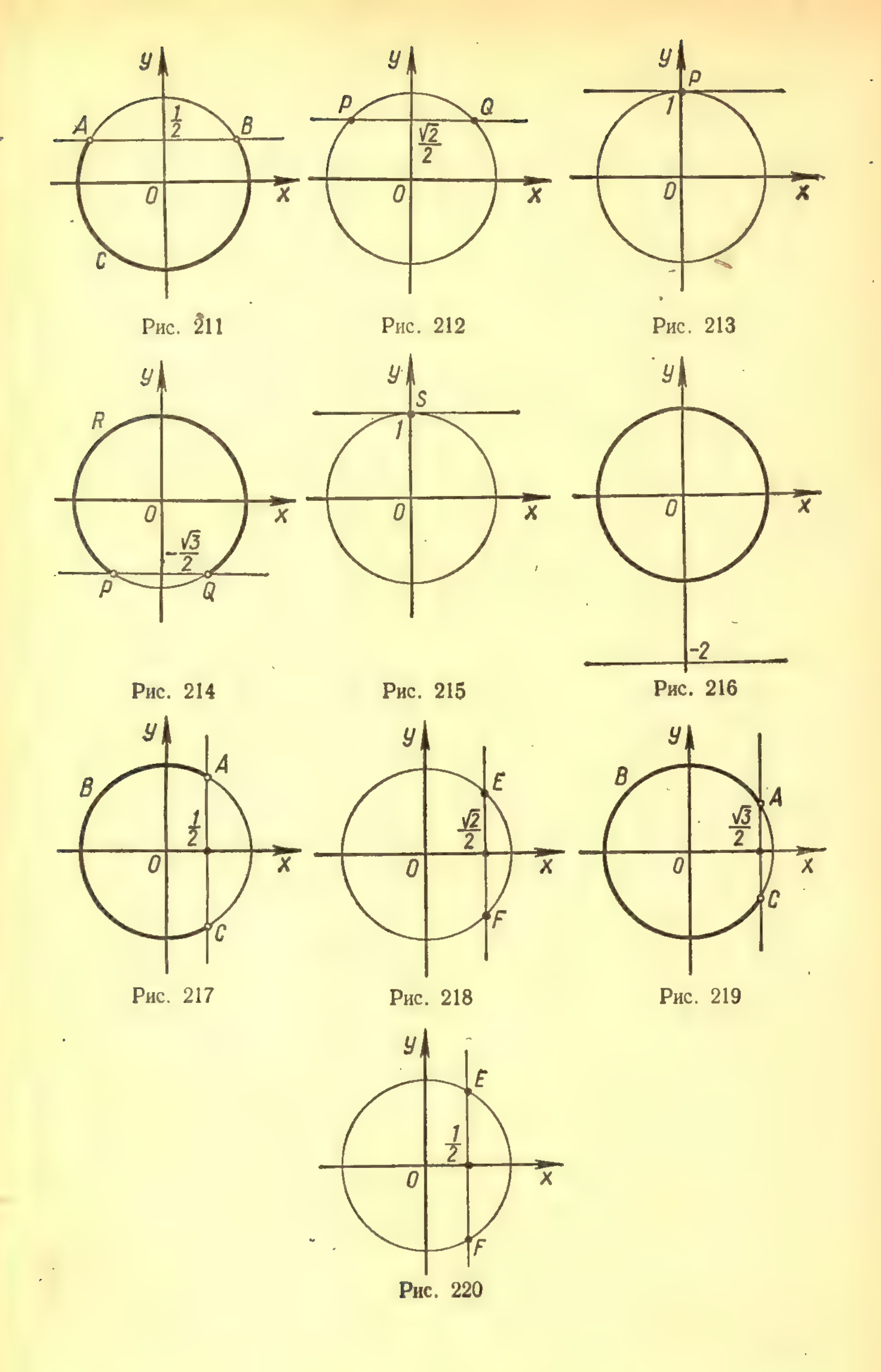


Рис. 211

Рис. 212

Рис. 213

Рис. 214

Рис. 215

Рис. 216

Рис. 217

Рис. 218

Рис. 219

Рис. 220

81. $-\mathrm{tg}\,15^\circ$. **82.** $-\mathrm{ctg}\,14^\circ$. **83.** $-\mathrm{ctg}\,9^\circ$. **84.** $-\mathrm{ctg}\,12^\circ$. **85.** $\cos\frac{\pi}{4}$. **86.** $\sin\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{6}$. **87.** $-\cos\frac{\pi}{5}$. **88.** $-\cos\frac{\pi}{10}$. **89.** $-\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4}$. **90.** $-\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{5}$. **91.** $-\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{18}$. **92.** $-\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{18}$. **93.** $\sin 8^\circ$. **94.** $-\sin 10^\circ$. **95.** $\cos 30^\circ$. **96.** $-\sin 45^\circ$. **97.** $\cos\frac{\pi}{12}$. **98.** $\sin\frac{\pi}{6}$. **99.** $-\mathrm{tg}\frac{\pi}{5}$. **100.** $-\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6}$. **101.** $\sin\frac{\pi}{7}$. **102.** $\cos 0{,}1\pi$. **103.** $-\cos 39^\circ$. **104.** $\cos 25^\circ$. **105.** $\mathrm{ctg}\,30^\circ$. **106.** $\sin 20^\circ$. **107.** $-\mathrm{ctg}\,25^\circ$. **108.** $\mathrm{ctg}\,18^\circ$. **117.** 5. **118.** 6. **126.** Множество изображено на рис. 211. **128.** Множество изображено на рис. 212. **130.** Множество изображено на рис. 213. **132.** Множество изображено на рис. 214. **134.** Множество изображено на рис. 215. **136.** Множество изображено на рис. 216. **137.** $\frac{\pi}{6}$. **138.** $\frac{\pi}{4}$. **139.** $\frac{\pi}{3}$. **140.** 0. **141.** $\frac{\pi}{2}$. **142.** $\{(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k \mid k\in Z\}$. **143.** $\{(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2} \mid k\in Z\}$. **144.** $\{(-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi k \mid k\in Z\}$. **145.** $\{(-1)^k x_0+\pi k \mid k\in Z\}$, $x_0\approx 0{,}64$. **146.** $\left\{\frac{\pi}{24}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4} \mid k\in Z\right\}$. **153.** Множество изображено на рис. 217. **155.** Множество изображено на рис. 218. **157.** Множество изображено на рис. 219. **159.** Множество изображено на рис. 220. **161.** $\frac{\pi}{3}$. **162.** $\frac{\pi}{4}$. **163.** $\frac{\pi}{6}$. **164.** $\frac{\pi}{2}$. **165.** 0. **166.** $\frac{2\pi}{3}$. **167.** $\frac{3\pi}{4}$. **168.** $\frac{5\pi}{6}$. **169.** π. **170.** а) $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k \,\middle|\, k\in Z\right\}$; б) $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+\pi k \,\middle|\, k\in Z\right\}$; г) $\left\{\pm 0{,}20-\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\pi k \,\middle|\, k\in Z\right\}$. **171.** а) $\arccos\frac{1}{2}>\arcsin\frac{1}{2}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$. **172.** $\arcsin 0<\arccos 0$. **173.** $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}>\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$. **174.** $\arccos 1<\arcsin 1$. **175.** $\frac{\pi}{2}$. **176.** $\frac{\pi}{2}$. **177.** $\frac{\pi}{2}$. **178.** $\frac{\pi}{2}$. **179.** $\frac{\pi}{2}$. **180*.** Обозначим через f функцию $f(x)=\sin x$. Тогда по формуле производной обратной функции (см. п. 112) $\arcsin' x=\frac{1}{f'(\arcsin x)}=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}$. Далее, так как $\sin(\arcsin x)=x$, то $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$ (перед корнем знак плюс, так как $\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$). Итак, $\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Аналогично, если $y=\arccos x$ и $g(u)=\cos u$, то $\arccos' x=\frac{1}{g'(y)}=\frac{1}{-\sin(\arccos x)}$. Далее, $\cos(\arccos x)=x$ и $\arccos x\in[0;\pi]$, поэтому $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$. Окончательно получаем: $\arccos' x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$. **181.** Решение. Обозначим $\arcsin x+\arccos x$ через $u(x)$. Тогда $u'(x)=\arcsin' x+\arccos' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=0$ (см. упр. 180). Следовательно, $u(x)=C$, где C — некоторая постоянная.

Для ее вычисления достаточно заметить, что $\arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. 195. $\frac{\pi}{3}$. 196. $\frac{\pi}{6}$. 197. $\frac{\pi}{4}$. 198. 0. 199. $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k \mid k\in Z\right\}$. 200. $\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi k \mid \in Z\right\}$. 201. $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2} \middle| k\in Z\right\}$. 202. $\left\{x_0+\frac{1}{3}\pi k \middle| k\in Z\right\}$, $x_0\approx 0{,}43$. 203. $\{-\pi+4\pi k \mid k\in Z\}$. 215. $\frac{\pi}{6}$. 216. $\frac{\pi}{3}$. 217. $\frac{\pi}{4}$. 218. $\frac{\pi}{2}$. 219. $\frac{5\pi}{6}$. 220. $\frac{3\pi}{4}$. 221. $\frac{2\pi}{3}$. 222. $\operatorname{arcctg} 1 = \operatorname{arctg} 1$. 223. $\operatorname{arcctg} \sqrt{3} < \operatorname{arctg} \sqrt{3}$. 224. $\operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} > \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$. 225. $\operatorname{arcctg} 0 > \operatorname{arctg} 0$. 226. $\operatorname{arcctg} 2 < \operatorname{arctg} 2$. 227. $\frac{\pi}{2}$. 228. $\frac{\pi}{2}$. 229. $\frac{\pi}{2}$. 230. $\frac{\pi}{2}$. 233. $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k \middle| k\in Z\right\}$. 234. $\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi k \middle| k\in Z\right\}$. 235. $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2} \middle| k\in Z\right\}$. 236. $\left\{x_0+\frac{1}{3}\pi k \middle| k\in Z\right\}$, $x_0\approx 0{,}09$. 237. $\left\{\frac{5\pi}{2}+5\pi k \mid k\in Z\right\}$. 238. $\cos\alpha = -0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$. 239. $\cos\alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = -\frac{1}{5\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{7}$. 240. 0; $\alpha\neq\pi k$, $k\in Z$. 241. $\cos^2\alpha$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$. 242. $\operatorname{tg}^2\alpha$, $\alpha\neq\pi k$, $k\in Z$. 243. 0, $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. 248. m^2-2. 249. $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k \middle| k\in Z\right\}$. 250. $\left\{(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k \mid k\in Z\right\}$. 251. $\frac{5}{\sqrt{26}}$, $-\frac{1}{\sqrt{26}}$, -5. 252. $\sqrt{0{,}1}$, $-3\sqrt{0{,}1}$, $-\frac{1}{3}$. 255. $\sin\alpha$, $\alpha\neq\pi k$, $k\in Z$.

256. $\begin{cases}\cos^2\alpha & \text{при } 2\pi k < \alpha < \pi + 2\pi k,\ k\in Z,\\ -(1+\sin^2\alpha) & \text{при } -\pi + 2\pi k < \alpha < 2\pi k,\ k\in Z.\end{cases}$ 257. 0, $\alpha\neq-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$. 258. $\frac{2}{1+\sin\alpha}$. 261. $\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}$. 262. $-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}$. 263. $\frac{7}{25}, \frac{24}{25}, \frac{7}{24}, 3\frac{3}{7}$. 264. $\frac{16}{65}, -\frac{63}{65}$. 265. $-\frac{24}{25}$. 266. $\frac{1}{2}\cos 10^\circ$. 267. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$. 268. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$. 269. $\frac{1+2\cos 20^\circ}{4}$. 270. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 2x\right)=-\frac{1}{2}\cos 2x$. 271. $-\frac{1}{2}\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$. 272. $\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 2\beta)$. 273. $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha-\cos 2x)$. 274. $\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 275. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 10^\circ$. 276. $\cos 35^\circ+\cos 5^\circ-\cos 15^\circ-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 277. $\cos 1^\circ+\cos 3^\circ+\cos 5^\circ+\cos 7^\circ+\cos 9^\circ+\cos 11^\circ+\cos 13^\circ+\cos 15^\circ$. 278. $\sin 30^\circ+\sin 15^\circ=0{,}5+\sqrt{0{,}5-0{,}25\sqrt{3}}$. 279. $\frac{1}{4}(1+\sqrt{3})$. 280. $\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$. 281. $\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$. 282. $\frac{1}{4}(1+\sqrt{3})$. 283. $\sqrt{3}$. 284. $1+\cos 2x$. 285. $1-$

$-\cos 4x$. 286. $0{,}5+\cos 2x+0{,}5\cos 4x$. 287. $\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x$. 288. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 12x$. 289. $0{,}5+0{,}5\cos 8x$. 293. Да. Указание. Воспользуйтесь результатом упр. 283. 294. $-\frac{4}{3}\pi+2\pi k<x<\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$. 295. $\frac{\pi}{4}+2\pi k\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$. 296. $x_0+2\pi k\leqslant x\leqslant \pi-x_0+2\pi k,\ k\in Z,\ x_0\approx 0{,}53$. 297. $-x_0+$ $+2\pi k<x<x_0+2\pi k,\ k\in Z,\ x_0\approx 0{,}66$. 298. $-\frac{5\pi}{8}+\pi k<x<\frac{\pi}{8}+\pi k$, $k\in Z$. 299. $-\frac{3\pi}{2}+2\pi k\leqslant x\leqslant -\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$. 300. $\frac{5\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{7\pi}{6}+$ $+2\pi k,\ k\in Z$. 301. $\frac{\pi}{8}+\pi k\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{8}+\pi k,\ k\in Z$. 302. $\frac{\pi}{3}+\pi k<x<\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$. 303. $-\frac{\pi}{2}+\pi k<x<\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. 304. $\frac{\pi}{3}+\pi k<x<\pi+\pi k,\ k\in Z$. 305. $\frac{\pi}{6}+$ $+\pi k\leqslant x<\pi+\pi k,\ k\in Z$. 306. $\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$. 307. $2\pi k\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+$ $+2\pi k,\ k\in Z$. 308. $\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$. 309. $\frac{\pi}{12}+\pi k<x<\frac{\pi}{6}+\pi k$, $\frac{5\pi}{12}+$ $+\pi k<x<\frac{\pi}{2}+\pi k$ и $\frac{3\pi}{4}+\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. Решение. $\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x}{1-\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} 2x}=\operatorname{tg} 3x$ при x, принадлежащих области определения левой части неравенства. Таким образом, нужно решить неравенство $\operatorname{tg} 3x\geqslant 1$ и исключить из полученного множества точки $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi l}{2}$; $n,l\in Z$. Отметим на графике функции $\operatorname{tg} t$ один из промежутков, состоящих из значений t ($t=3x$), удовлетворяющих неравенству $\operatorname{tg} t\geqslant 1$: $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$. Используя периодичность тангенса, получаем $\frac{\pi}{4}+\pi k\leqslant 3x<\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$, откуда $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}\leqslant$ $\leqslant x<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z$. Для того чтобы исключить указанные выше точки, удобно рассмотреть промежуток длины π (и добавить $\pi k,\ k\in Z$): $\operatorname{tg} 3x\geqslant 1$ при $\frac{\pi}{12}+\pi k\leqslant x<\frac{\pi}{6}+\pi k$, $\frac{5\pi}{12}+\pi k\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\frac{3\pi}{4}+\pi k\leqslant x<\frac{5\pi}{6}+\pi k$, исключаем числа вида $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\frac{3\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$, в данном случае это числа вида $\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$. 310. $\left\{\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\ \middle|\ k\in Z\right\}$. 311. $\left\{\frac{\pi}{2}+\right.$ $\left.+2\pi k\ \middle|\ k\in Z\right\}$. 312. $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k\ \middle|\ k\in Z\right\}$. 313. $\{\alpha_1+\pi k;\ \ \alpha_2+\pi k\,|$

$k \in Z\}$, $\alpha_1 \approx 1{,}11$; $\alpha_2 \approx 0{,}46$. **314.** $\left\{\pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi k; \quad \pi + 2\pi k \,\middle|\, k \in Z\right\}$.
315. $\{\alpha_1 + \pi k; \quad \alpha_2 + \pi k \mid k \in Z\}$, $\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}55$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}02$. **316.** $\{\alpha + 2\pi k \mid k \in Z\}$, $\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3} \approx 1{,}18$.
317. $\left\{\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \,\middle|\, k \in Z\right\}$. **318.** $\{2\pi k; \ \pi + 4\pi k \mid k \in Z\}$. **319.** $\{\pi + 2\pi k; \ 4\pi k \mid k \in Z\}$. **320.** $\{\alpha \cdot (-1)^k + \pi k \mid k \in Z\}$, $\alpha = \arcsin \frac{1}{3} \approx 0{,}34$.
321. $\left\{\frac{\pi}{6} + \pi k \,\middle|\, k \in Z\right\}$. **322.** $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k \,\middle|\, k \in Z\right\}$. **323.** $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k; \ \alpha + \pi k \,\middle|\, k \in Z\right\}$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 1{,}11$. **324.** $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k; \ \alpha + \pi k \,\middle|\, k \in Z\right\}$, $\alpha = \operatorname{arctg} 3 \approx 1{,}25$. **335.** $5 \cos 5x$. **336.** $-6 \cos 6x$. **337.** $-a \sin (2ax + 2b)$. **338.** $2 \sin x + 2x \cos x - 2x \cos (x + 2) + (x^2 - 2{,}3) \sin (x + 2)$. **339.** $(2x + 1) \sin 3x + 3(x^2 + x + 1) \cos 3x$. **340.** $\cos 2x$. **341.** $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} - \sin x - \cos x$.
342. 1. **343.** $\frac{3}{5}$. **344.** $\frac{4}{7}$. **345.** $\frac{5}{3}$. **346.** а) 3; π; $\frac{5\pi}{4}$; б) 2; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{5}$. **347.** а) 0,6; 4π; $1{,}3\pi$; б) 1; 2π, $1 + \frac{5\pi}{3}$. **348.** Наименьший положительный период функции равен $\frac{3\pi}{4}$. Функция возрастает на промежутках $\left[\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi k}{4}; \frac{17\pi}{24} + \frac{3\pi k}{4}\right]$, $k \in Z$; убывает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{24} + \frac{3\pi k}{4}; \ \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi k}{4}\right]$, $k \in Z$. В точках вида $\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi k}{4}$; $k \in Z$, функция имеет минимумы; в точках вида $-\frac{\pi}{24} + \frac{3\pi k}{4}$, $k \in Z$, функция имеет максимумы. График функции изображен на рис. 221. **349.** Наименьший положительный период функции равен $\frac{6\pi}{5}$. Функция возрастает на промежутках $\left[-\frac{13\pi}{20} + \frac{6\pi k}{5}; -\frac{\pi}{20} + \frac{6\pi k}{5}\right]$, $k \in Z$; убывает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{20} + \frac{6\pi k}{5}; \ \frac{11\pi}{20} + \frac{6\pi k}{5}\right]$, $k \in Z$. В точках вида $-\frac{13\pi}{20} + \frac{6\pi k}{5}$, $k \in Z$, функция имеет минимумы; в точках вида $-\frac{\pi}{20} + \frac{6\pi k}{5}$, $k \in Z$, функция имеет максимумы. График функции изображен на рис. 222. **350.** Да.

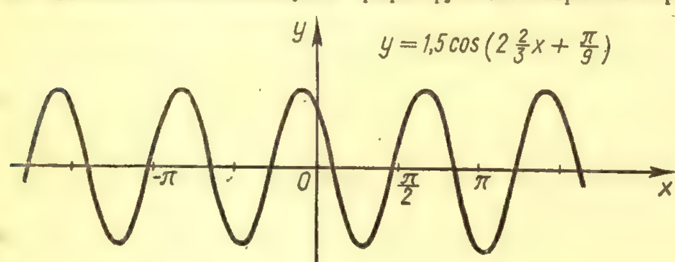


Рис. 221

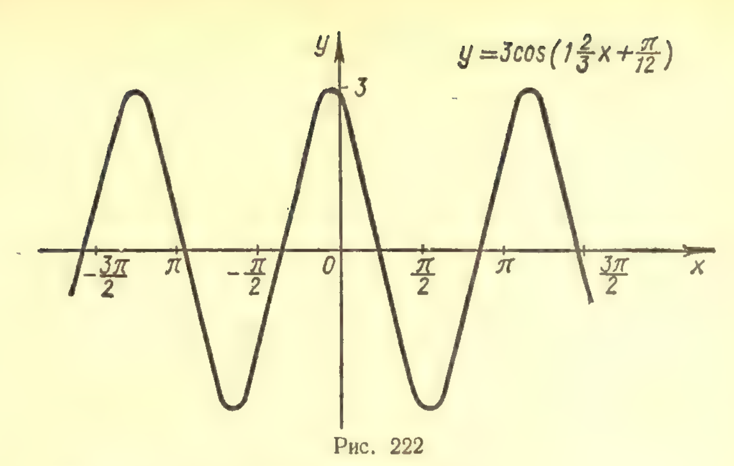


Рис. 222

351. $y = 2\cos\left(2x + \frac{7\pi}{4}\right)$. 352. $y = 5\cos\left(3x + 2\pi + \frac{\pi}{12} - \varphi_0\right)$, $\varphi_0 = \arccos\frac{3}{5}$. **353.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. **354.** $y = 3\cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)$. **355.** $4\cos(2x + \pi)$. **356.** $\sqrt{52}\cos(x + \alpha)$, где $\alpha = \arccos\left(-\sqrt{\frac{12}{13}}\right) \approx 2{,}86$. **357.** $-\sin\alpha$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. 358. -1 при $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$ и $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi l$, $l \in Z$. **359.** $\mathrm{tg}^2 x$. 360. $1 - \sin\alpha$, $\alpha \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. 363. $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **364.** $1 + \sqrt{3}$. **365.** $\frac{\pi}{2}$. **366.** $\frac{7\pi}{12}$. **367.** $\frac{2\pi}{3}$. **368.** 0. **369.** $\frac{7\pi}{12}$. **378.** а) $\sqrt{0{,}2}$, $2\sqrt{0{,}2}$, $0{,}5$; б) $\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{5}$, $-\frac{4}{3}$. 381. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 382. $\{\pm\alpha + 2\pi k \mid k \in Z\}$. $\alpha = \arccos(-0{,}25) \approx 1{,}82$. 383. $\{\alpha + \pi k \mid k \in Z\}$, $\alpha = \mathrm{arctg}\, 0{,}5 \approx 0{,}46$. **384.** $\{\pi + 2\pi k; \pm\alpha + 4\pi k \mid k \in Z\}$, $\alpha = 2\arccos\frac{1}{3} \approx 2{,}46$. 385. $\left\{\frac{\pi k}{2} \middle| k \in Z\right\}$. **386.** $\left\{\frac{\pi k}{4} \middle| k \in Z\right\}$. 387. $\{\alpha(-1)^k + \pi k \mid k \in Z\}$, $\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}62$. **388.** $0{,}5(\sin(3x + 3y) + \sin(x - y))$. 389. $0{,}5(\cos 4\alpha + \cos 2\beta)$. 390. $\frac{1}{2}(\cos(x - 3y) - \cos(3x + y))$. **391.** $0{,}5(1 - \cos 2x)$.

Глава VII

398. $\frac{x^4}{4} + C$. **399.** $\frac{x^5}{5} + C$. **400.** $\frac{x^3}{2} + C$. **401.** $2\frac{1}{2}x + C$. **402.** $\frac{x^4}{4} - 3$. **403.** $-\cos x + 4$. **404.** $\mathrm{tg}\, x - 1$. **405.** $-2x + 11$. **406.** $-\frac{1}{2x^2} + 5$, $x \in]-\infty; 0[$. **407.** $\sin x - 1$. **408.** Р е ш е н и е. Первая первообразная имеет вид $3\sqrt[3]{x} + C_1$, вторая $3\sqrt[3]{x} + C_2$. Постоянные C_1 и C_2 определяем из уравнений: $3 \cdot \sqrt[3]{1} + C_1 = 2$ и $3 \cdot \sqrt[3]{8} + C_2 = 4$, откуда $C_1 = -1$ и $C_2 = -2$. Перво-

образные отличаются на 1; график первой из них проходит выше (рис. 223). 409. $\frac{5}{3}x^3 - x + C$. 410. $-\frac{1}{x} + 4\cos x + C$. 411. $5\sqrt{2x+7} + C$, $x > -3{,}5$. 412. $\frac{3}{5}\operatorname{tg} 5x + C$. 413. $-\frac{2}{3}\operatorname{ctg} 3x + C$. 414. $x - \frac{1}{3}\sin 3x + C$. 415. $-21\cos\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\operatorname{tg} 4x + C$. 416. $-6\sqrt[3]{5-2x} - 2\sin\frac{x}{2} + C_1$ при $x < 2{,}5$; $6\sqrt[3]{2x-5} - 2\sin\frac{x}{2} + C_2$ при $x > 2{,}5$. 417. $-20\cos\frac{x}{10} + \frac{5}{6(3x-1)^2} + C$. 418. $7x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + 10\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C$. 419. 9. 420. $\frac{1}{2}$. Решение. Для $y = \frac{1}{x^2}$ одна из первообразных есть $F(x) = -\frac{1}{x}$. Следовательно, площадь данной криволинейной трапеции $ABCE$ (рис. 224) равна $F(2) - F(1) = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$.

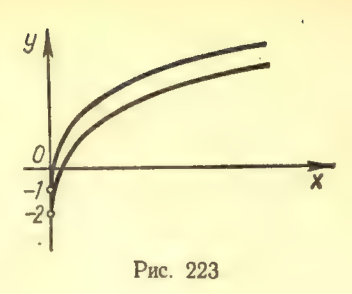


Рис. 223

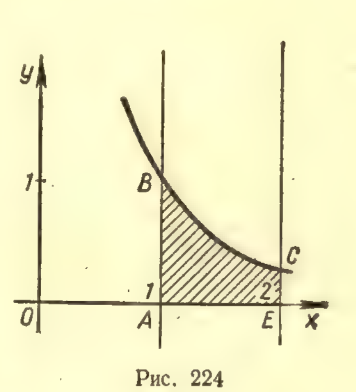


Рис. 224

421. 2. 422. 1. Решение. Для функции $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ одной из первообразных является функция $F(x) = \operatorname{tg} x$. Следовательно, площадь данной криволинейной трапеции равна $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}(0) = 1 - 0 = 1$.

423. $1\frac{1}{3}$. 424. $2\frac{2}{3}$. Решение. График функции имеет с прямой $y = 0$ (ось абсцисс) одну общую точку $P = M(-2; 0)$. В качестве первообразной возьмем функцию $F(x) = \frac{1}{3}(x+2)^3$. Тогда площадь данного криволинейного треугольника есть $F(0) - F(-2) = \frac{1}{3}(2^3 - 0^3) = 2\frac{2}{3}$. 425. 2. 426. 1. 427. $\frac{2}{5}$. 428. 1. 429. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 430. 3. 431. $-2{,}5$. 432. 1,5. 433. 0,9. 434. 20. 435. $5\frac{1}{3}$. Решение. График функции $y = \sqrt{x}$ имеет с прямой $y = 0$ одну общую точку $O = M(0; 0)$ (рис. 225). Таким образом, искомая площадь есть площадь криволинейного треугольника OAB, т. е. $S = \int\limits_0^4 \sqrt{x}\,dx =$

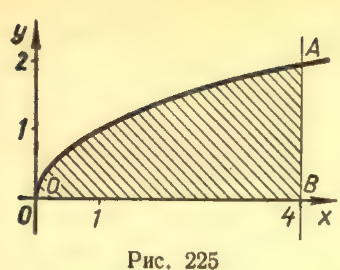


Рис. 225

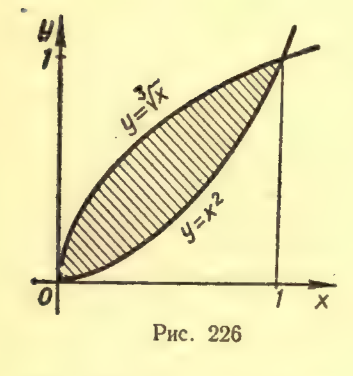


Рис. 226

$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{2}{3}(8-0) = 5\frac{1}{3}$. **437.** 2. **438.** $1\frac{1}{3}$. **439.** $\frac{5}{12}$. Решение. Из уравнения $x^2 = \sqrt[3]{x}$ находим абсциссы точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = \sqrt[3]{x}$; $x=0$ и $x=1$. Искомая площадь равна (рис. 226): $S = \int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx - \int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$. **440.** По формуле (4) п. 103 $v(t) = v_0 + \int\limits_0^t a(z)\,dz = v_0 + \int\limits_0^t (-9,8)\,dz = v_0 - 9,8t$. По формуле (2) п. 103 $h(t) = h_0 + \int\limits_0^t v(z)\,dz = 0 + \int\limits_0^t (v_0 - 9,8z)dz = (v_0 z - 4,9z^2)\Big|_0^t = v_0 t - 4,9t^2$.

Для нахождения наибольшего значения $h(t)$, как обычно, нужно сначала найти критические точки $h(t)$. В данном случае $h'(t)$ уже известна — это $v(t)$; $v(t) = 0$ при $t_0 = \frac{v_0}{9,8}$. При этом значении $h(t)$ достигает наибольшего значения (это следует, например, из того, что $h(t)$ — квадратичная функция), $h(t_0) = \frac{v_0^2}{19,6}$, $v(t_0) = 0$. Наконец, $h(t) = 0$ при $t = 0$ и $t = \frac{v_0}{4,9}$. Ответ. 1) $\frac{v_0^2}{19,6}$; 2) 0; 3) $\frac{v_0}{4,9}$. **441.** 122,375; 9,77. **442.** $8R + \frac{16}{3}a$, $R + \frac{a}{4}$. **443.** а) $(2x-2)v$, $2v^2$. Решение. По формуле производной сложной функции получаем $v(t) = y'(t) = (2x-2)\,x'(t) = (2x-2)\,v$, $a(t) = v'(t) = (2x-2)v' + 2\cdot x'v = 0 + 2v\cdot v = 2v^2$; б) $(3x^2-4x)\,v$, $(6x-4)v^2$. **444.** $S_1 - S_2 + S_3$. **445.** 0,9974. **446.** 0,16 *дж*. Решение. Так как $F = kx$ и при $x = 0,01$ имеем $F = 2$, то $k = 2:0,01 = 200$. По формуле (1) п. 105 получаем $A = \int\limits_0^{0,04} 200x\,dx = 100x^2 \Big|_0^{0,04} = 0,16$ (*дж*). **447.** а) 0,16 *дж*; б) 0,54 *дж*. **448.** Решение. По закону Кулона на электрон, помещенный в точке с координатой x ($x > 0$), действует сила $-\gamma\frac{q}{x^2}$, где

γ — некоторая постоянная; знак минус указывает на то, что при отрицательном γ сила направлена от начала координат, при положительном — к началу координат. Следовательно, $A = \int\limits_a^b \left(-\gamma \cdot \frac{q}{x^2}\right) dx =$
$= \frac{\gamma q}{x}\Big|_a^b = \frac{\gamma q}{b} - \frac{\gamma q}{a} = \gamma q \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$.

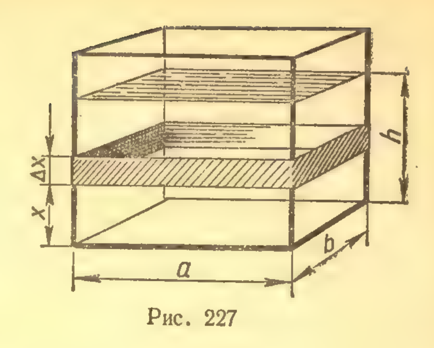


Рис. 227

449. $\frac{(a+2b)h^2}{6}\rho g$*. 450. $(a+b)h^2\rho g$.

Рис. 228

Решение. Обозначим через $P(x)$ давление на часть стенок аквариума, лежащих ниже плоскости, проведенной параллельно основанию на расстоянии x от него. Тогда искомое давление есть $P(h)$ и $P(0) = 0$ (рис. 227). Площадь части стенок аквариума, заключенной между плоскостями, параллельными основанию, на расстояниях x и $x + \Delta x$ от дна, равна $2(a+b)\Delta x$. Давление на эту часть стенок приблизительно равно $2(a+b)\Delta x(h-x)\rho g = \Delta P$. Далее, $P'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = 2(a+b)(h-x)\rho g$ и $P(h) = P(0) + \int\limits_0^h P'(x)\,dx = 0 + \int\limits_0^h 2(a+b)\rho g(h-x)\,dx = 2\rho g(a+b)\int\limits_0^h (h-x)\,dx = 2(a+b)\rho g\left(hx - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^h = \rho g(a+b)h^2$. 451. $\frac{\pi r^2 h^2}{2}\rho g$. 452. $\frac{\gamma m M}{l} \times \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+l}\right)$. Решение. Масса части стержня, отмеченной на рис. 228, равна $\frac{\Delta x M}{l}$, а расстояние до материальной точки приблизительно равно x. В силу закона Ньютона на эту часть стержня действует сила $\Delta F \approx \frac{\gamma m M \Delta x}{l x^2}$. Обозначим через $F(x)$ силу, действующую на часть стержня, заключенную между точками с координатами r и x; $x \in [r; r+l]$; $F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{\gamma m M}{l x^2}$ и $F(r) = 0$, поэтому искомая сила, равная $F(r + l)$, есть $\int\limits_r^{r+l} \left(\gamma \frac{mM}{lx^2}\right) dx = \frac{-\gamma m M}{l} \cdot \frac{1}{x}\Big|_r^{r+l} = \frac{\gamma m M}{l}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+l}\right)$. 453. $\frac{g^2 M^3}{6m^2}$, g — ускорение свободного падения. 454. $\frac{\pi\rho R^2 H^2}{12}$. Решение. Затраченная на преодоление работы силы тяжести работа равна потенциальной энергии песка. Объем усеченного конуса высоты Δx, огра-

---

* В упр. 449—451 ρ — плотность воды, g — ускорение свободного падения.

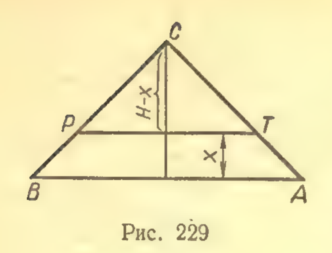


Рис. 229

ниченного плоскостями, проведенными параллельно основанию на расстояниях x и $x + \Delta x$ от него, равен (с точностью до величин порядка Δx^2) $S(x)\,\Delta x$, где $S(x)$ — площадь сечения плоскостью, параллельной основанию, проведенной на расстоянии x от этого основания. Потенциальная энергия песка, заключенного в этом усеченном конусе, равна $\Delta E \approx \rho x S(x)\,\Delta x$ (с точностью до величин порядка Δx^2). Для определения $S(x)$ рассмотрим осевое сечение конуса (рис. 229). Высота треугольника PCT, проведенная к стороне PT, равна $H - x$. Из подобия треугольников PCT и ABC получаем: $\frac{|PT|}{|AB|} = \frac{H-x}{H}$, откуда $|PT| = \frac{|AB|(H-x)}{H}$, $S(x) = \pi(0,5\,|PT|)^2 = \pi R^2 \frac{(H-x)^2}{H^2}$. Обозначим через $E(x)$ потенциальную энергию песка в усеченном конусе, ограниченном основанием и плоскостью (параллельной основанию), проведенной на высоте x. Тогда $E'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{\pi\rho R^2 x(H-x)^2}{H^2}$ и $A = E(H) = \int\limits_0^H E'(x)\,dx =$

$$= \int\limits_0^H \frac{\pi\rho R^2}{H^2}(H^2x - 2Hx^2 + x^3)\,dx = \frac{\pi\rho R^2}{H^2}\int\limits_0^H (H^2x - 2Hx^2 + x^3)\,dx = \frac{\pi\rho R^2}{H^2}\left(\frac{H^2x^2}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2Hx^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^H = \frac{\pi\rho R^2 H^4}{H^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi\rho R^2 H^2}{12}.$$

455. $\frac{\rho S\omega^2 l^3}{6} = 4\,160\,000\pi^2$ (*эрг*). Масса части стержня, отмеченной на рис. 230, равна $\rho S \Delta x$; пренебрегаем диаметром стержня (считаем отмеченную часть отрезком длины Δx), тогда с точностью до величин порядка Δx линейная скорость v каждой точки этой части стержня равна ωx. Обозначим через $E(x)$ кинетическую энергию части $[0; x]$ стержня. Приращение кинетической энергии за счет отрезка $[x; x + \Delta x]$ приблизительно равно $\frac{mv^2}{2}$, т. е. $\frac{\rho S\omega^2 x^2 \Delta x}{2}$, поэтому $E'(x) = \frac{\rho S\omega^2 x^2}{2}$. $E(0) = 0$, и, следовательно, искомая энергия есть $E(l) = \int\limits_0^l E'(x)\,dx = \int\limits_0^l \frac{\rho S\omega^2 x^2\,dx}{2} =$

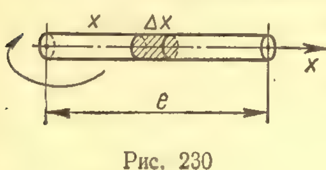


Рис. 230

$$= \rho S\omega^2 \int\limits_0^l \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{\rho S\omega^2 l^3}{6} = 4\,160\,000\,\pi^2 \text{ (эрг)}.$$

456. $\frac{\rho a d\omega^2 b^3}{6} = 11\,520\,000\,\pi^2$ (*эрг*). **457.** $\frac{\rho a d\omega^2 h^3}{24} = 495\,000\,\pi^2$ (*эрг*). Решение. Масса части пластинки, отмеченной на рис. 231, приближенно равна $\rho y d \Delta x$; y находим из подобия треугольников ABC и PQC: $y = \frac{a(h-x)}{h}$. Так

Рис. 231

как толщиной пластинки мы пренебрегаем, то линейная скорость каждой точки этой части (с точностью до величин порядка Δx) равна ωx, а приращение ΔE кинетической энергии за счет этой части равно $\frac{\rho a d\omega^2 x^2 (h-x)\Delta x}{2h}$ (с точностью до величин порядка Δx^2). Обозначим через $E(x)$ кинетическую энергию части $BQPA$. Тогда $E'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{\rho a\, d\omega^2 x^2 (h-x)}{2h}$. $E(h) = \int\limits_0^h E'(x)\,dx = \int\limits_0^h \frac{\rho a d\omega^2 (x^2 h - x^3)}{2h}dx = \frac{\rho a d\omega^2}{2h}\left(\frac{x^3 h}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^h = \frac{\rho a\, d\omega^2 h^3}{24} = 495\,000\,\pi^2$ (*эрг*). **458.** 3. **459.** $9\sqrt{3}$. **460.** 0. **461.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

462. $\frac{7^{10}-1}{20}$. **463.** $-33{,}75$. **464.** 8. **465.** $\frac{1}{2}$. Решение. $\int\limits_1^2 \frac{x+1}{(2x-1)^3}dx = \int\limits_1^2 \frac{x-0{,}5+1{,}5}{(2x-1)^3}dx = \int\limits_1^2 \frac{0{,}5dx}{(2x-1)^2} + \int\limits_1^2 \frac{1{,}5dx}{(2x-1)^3} = -\frac{1}{4}(2x-1)^{-1}\Big|_1^2 - 1{,}5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(2x-1)^{-2}\Big|_1^2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-1\right) - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{9}-1\right) = \frac{1}{2}$. **466.** $-2\frac{2}{3}$. Решение. Сделаем замену переменной по формуле $t = 2 - \frac{x}{2}$ ($p=2$, $k=-0{,}5$). Тогда $x = 4-2t$ и $\frac{x}{\sqrt{2-\frac{x}{2}}} = \frac{4-2t}{\sqrt{t}}$. Поэтому $\int\limits_{-4}^2 \frac{xdx}{\sqrt{2-\frac{x}{2}}} = \frac{1}{-0{,}5}\int\limits_{-0{,}5\cdot(-4)+2}^{-0{,}5\cdot 2+2} \frac{4-2t}{\sqrt{t}}dt = -2\int\limits_4^1\left(\frac{4}{\sqrt{t}} - 2\sqrt{t}\right)dt = -2\left(8\sqrt{t}\Big|_4^1 - \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_4^1\right) = -2\left((8-16) - \left(\frac{4}{3}-\frac{32}{3}\right)\right) = -2\left(-8+\frac{28}{3}\right) = -2\cdot\frac{4}{3} = -2\frac{2}{3}$. **467.** $-135{,}6$. Решение. Сделаем замену переменной по формуле $t = 1 + \frac{x}{4}$. Тогда $x = 4t-4$, $5-x = 9-4t$. Из формулы замены найдем нижний и верхний пределы интегрирования: $1+\frac{1}{4}\cdot 0 = 1$ и $1+\frac{1}{4}\cdot 28 = 8$. Таким образом, искомый интеграл равен $\left(k=\frac{1}{4}\right)\frac{1}{k}\int\limits_1^8\left(\frac{9}{\sqrt[3]{t}} - 4\sqrt[3]{t^2}\right)dt = 4\left(\frac{27}{2}\sqrt[3]{t^2} - \frac{12}{5}\sqrt[3]{t^5}\right)\Big|_1^8 = 4\left(\frac{27}{2}(4-1) - \frac{12}{5}(32-1)\right) = 4(40{,}5-74{,}4) = -135{,}6$. **468.** $-1\frac{73}{135}$. Указание. Сделайте замену переменной по формуле $t = 3x-1$ и вычислите получен-

ный интеграл $\frac{1}{3}\int\limits_0^4\left(\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{5}{3}t^{\frac{1}{2}}\right)dt$. **469.** $-1\frac{2}{7}$. Решение. Сделаем замену переменной по формуле $y=1-\frac{x}{2}$. Тогда $x=2-2y$; нижний и верхний пределы интегрирования: $1-\frac{2}{2}=0$ и $1-\frac{0}{2}=1$. Получим (так как $k=-0{,}5$): $\int\limits_2^0 x\sqrt[3]{1-\frac{x}{2}}\,dx=-2\int\limits_0^1(2-2y)\sqrt[3]{y}\,dy=-4\int\limits_0^1\left(y^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{4}{3}}\right)dy=$ $=-4\left(\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{7}y^{\frac{7}{3}}\right)\Big|_0^1=-4\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{7}\right)=-4\cdot\frac{9}{28}=-1\frac{2}{7}$. **470.** 9. Решение. Из уравнения $x+1=5+3x-2x^2$ находим абсциссы точек пересечения графиков функций $y=x+1$ и $y=5+3x-2x^2$: $x=-1$ и $x=2$. Поэтому (рис. 232) искомая площадь есть разность площадей криволинейной трапеции $PSQR$ и треугольника PQR: $\int\limits_{-1}^2(5+3x-2x^2)\,dx-\int\limits_{-1}^2(1+x)\,dx=$ $=\int\limits_{-1}^2(4+2x-2x^2)\,dx=\left(4x+x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^2=9$. **471.** 4,5. **472.** $0{,}5x^2-5$. **473.** $5x-14$. **474.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-17$ $(x>0)$. **475.** $-\frac{1}{x}-2$, $x\in\,]0;\ \infty[$. **476.** $-2\sqrt{(3-x)}+9$, $x\in\,]-\infty;\ 3[$. **477.** $2x-1{,}5x^2+5$. **478.** На $3\frac{1}{3}$; второй. **479.** На 0,25; второй. **480.** $7x-2x^3+C$. **481.** $3x+2{,}5x^2+C$. **482.** $0{,}5kx^2+bx+C$. **483.** x^2-x^3+C. **484.** $4x-\frac{1}{3}x^3+C$. **485.** $\frac{1}{3}x^3+$ $+2x^2-7x+C$. **486.** $\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C$. **487.** $-\frac{1}{6}(3+2x)^{-3}+C$.

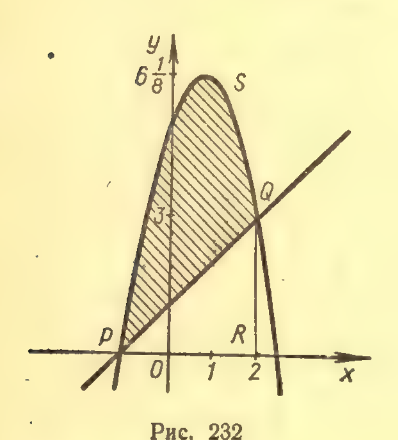


Рис. 232

Рис. 233

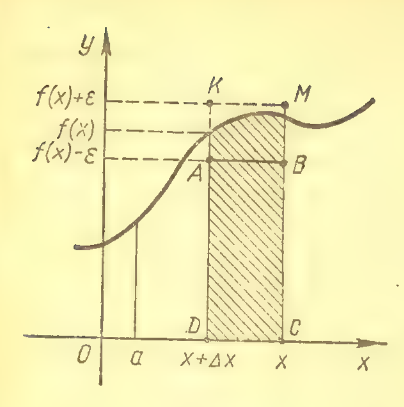


Рис. 234

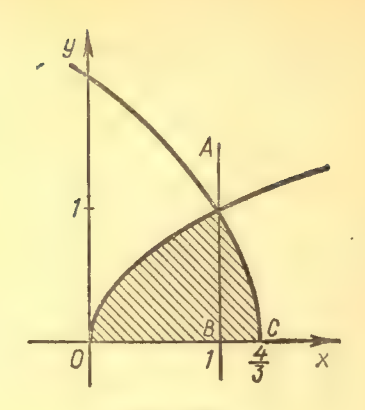


Рис. 235

488. $-\frac{10}{3}\sqrt{7-3x}+C$. **489.** $5x+\frac{1}{7}\cos 7x+C$. **490.** $4x+21\sin\frac{x}{7}+C$. **491.** $-10\cos\frac{x}{5}+\frac{1}{2}\sin 6x+C$. **492.** $1{,}5x^2-\frac{1}{4}\operatorname{tg} 8x+C$. **493.** $-\frac{4}{x+3}-$ $-\frac{7}{3}\operatorname{ctg} 3x+C$. **494.** Решение. При $\Delta x<0$ приращение $\Delta S(x)=$ $=S(x+\Delta x)-S(x)$ отрицательно, поэтому площадь фигуры, заштрихованной на рис. 233, есть $-\Delta S(x)$. Очевидно, что $S_{ABCD}<-\Delta S(x)<S_{ECDN}$, или $(x+\Delta x)^2\cdot(-\Delta x)<-\Delta S(x)<x^2\cdot(-\Delta x)$, откуда $(x+\Delta x)^2<$ $<\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}<x^2$, т. е. $2x\Delta x+\Delta x^2<\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}-x^2<0$. Из полученного равенства видно, что $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}=x^2$. **495.** Указание. Площадь заштрихованной на рис. 234 фигуры есть $S(x)-S(x+\Delta x)=-\Delta S(x)$. Из рисунка видно, что $S_{ABCD}<-\Delta S(x)<S_{KMCD}$, откуда $(f(x)-\varepsilon)\times$ $\times(-\Delta x)<-\Delta S(x)<(f(x)+\varepsilon)(-\Delta x)$, поэтому $f(x)-\varepsilon<\frac{-\Delta S(x)}{-\Delta x}<$ $<f(x)+\varepsilon$ (Δx отрицательно!). **496.** а) 4; б) 18. **497.** 2. **498.** 0,5. **499.** 4,5. **500.** $\frac{1}{3}$. **501.** $\frac{4n}{2n+1}$. **502.** 9. **503.** $\frac{8}{9}$. Решение. $\sqrt{x}=$ $=\sqrt{4-3x}$ при $x=4-3x$ $(x>0)$, т. е. при $x=1$. Искомая площадь равна сумме площадей криволинейных треугольников OAB и ABC (рис. 235), т. е.

$$S=\int_0^1\sqrt{x}\,dx+\int_1^{\frac{4}{3}}\sqrt{4-3x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\frac{2}{9}(4-3x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{\frac{4}{3}}=\frac{2}{3}-\left(0-\frac{2}{9}\right)=$$

$=\frac{8}{9}$. **504.** Надо доказать, что $\int_p^q(ax^2+bx+c)\,dx=\frac{q-p}{6}(y_1+4y_2+y_3)$.

С одной стороны, $\int_p^q (ax^2+bx+c)\,dx = \left(\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+c\right)\Big|_p^q = \frac{1}{6}(2a(q^3-p^3)+$
$+3b(q^2-p^2)+6c(q-p)) = \frac{1}{6}(q-p)(2a(q^2+qp+p^2)+3b(p+q)+6c)$.

С другой стороны, $\frac{q-p}{6}(y_1+4y_2+y_3) = \frac{q-p}{6}\left(ap^2+bp+c+4a\left(\frac{p+q}{2}\right)^2+\right.$
$\left.+4b\frac{p+q}{2}+4c+aq^2+bq+c\right) = \frac{q-p}{6}(2a(q^2+qp+p^2)+3b(p+q)+6c)$.

505. $\frac{2}{5}$. **506.** π. **507.** 0. Решение. $\int_0^{2\pi} \sin 3x \cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\sin 8x - \sin 2x)\,dx =$
$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos 8x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}(\cos 16\pi - \cos 0) + \frac{1}{2}(\cos 4\pi -\right.$
$\left.-\cos 0)\right) = \frac{1}{2}(-0+0) = 0$. **508.** Указание. Воспользуйтесь формулой
$\cos 2x \cos 7x = \frac{1}{2}(\cos 9x + \cos 5x)$. **509.** а) π. Решение. $\int_0^{2\pi} \cos^2 nx\,dx =$
$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos 2nx + 1)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2nx\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dx = \frac{1}{4n}\sin 2nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}x\Big|_0^{2\pi} =$
$= \frac{1}{4n}(\sin 4\pi n - \sin 0) + \pi = \pi$; б) π при $k=m$, 0 при $k \neq m$. Решение.

$$\sin kx \sin mx = \frac{1}{2}(\cos(k-m)x - \cos(k+m)x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\cos 2kx) \text{ при } k=m, \\ \frac{1}{2}(\cos(k-m)x - \cos(k+m)x) \text{ при } k \neq m, \end{cases}$$

поэтому при $k=m$: $\int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2kx\,dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^{2\pi} -$
$-\frac{1}{4k}\sin 2kx\Big|_0^{2\pi} = \pi - \frac{1}{4k}(\sin 4k\pi - \sin 0) = \pi$; при $k \neq m$: $\int_0^{2\pi}\sin kx \sin mx\,dx =$
$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(k-m)x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(k+m)x\,dx = \frac{1}{2(k-m)}\sin(k-m)x\Big|_0^{2\pi} -$
$-\frac{1}{2(k+m)}\sin(k+m)x\Big|_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0$. **510.** По формуле Ньютона — Лейбница
$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, а $\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$; следовательно,

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. **511.** Так как $\int_x^b f(t)\,dt = -\int_b^x f(t)\,dt$ (см. упр. 510), а $\left(\int_b^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$, то $\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)' = -f(x)$. **512.** $\int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a)$, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(c)$; складывая эти равенства, получаем: $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$.

513. Указание. Воспользуйтесь методом математической индукции. **514.** Так как $(F(x+T) - F(x))' = f(x+T) - f(x) = 0$, то по признаку постоянства функции $F(x+T) - F(x) = C$. Для определения постоянной C подставим в полученное равенство $x = 0$: $C = F(0+T) - F(0) = \int_0^T f(x)\,dx$. Таким образом, для любого x верно равенство $F(x+T) - F(x) = \int_0^T f(x)\,dx$. В частности, при $x = a$ получаем: $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = F(a+T) - F(a) = \int_0^T f(x)\,dx$. **517.** Из формулы замены переменной получаем: $\int_{-a}^0 f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(x)\,dx = -\int_0^{-a} (-f(-x)\,dx) = \int_0^{-a} f(-x)\,dx = \frac{1}{-1}\int_{0(-1)+0}^{-a(-1)+0} f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx$. Следовательно, $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0$. **518.** Из формулы замены переменной получаем: $\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_0^{-a} (-f(x))\,dx = \int_0^{-a}(-f(-x))\,dx = \frac{1}{-1}\int_{0(-1)+0}^{-a(-1)+0} (-f(x))\,dx = -\int_0^a (-f(x))\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$. Следовательно, $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\cdot\int_0^a f(x)\,dx$. **519.** Если $\int_a^b f(x)\,dx < 0$, то $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = -\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (-f(x))\,dx$ и требуемое неравенство следует из неравенства $-f(x) \leqslant |f(x)|$ и результата упр. 516. Аналогично при $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ имеем $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b f(x)\,dx$, поэтому требуемое неравенство следует из неравен-

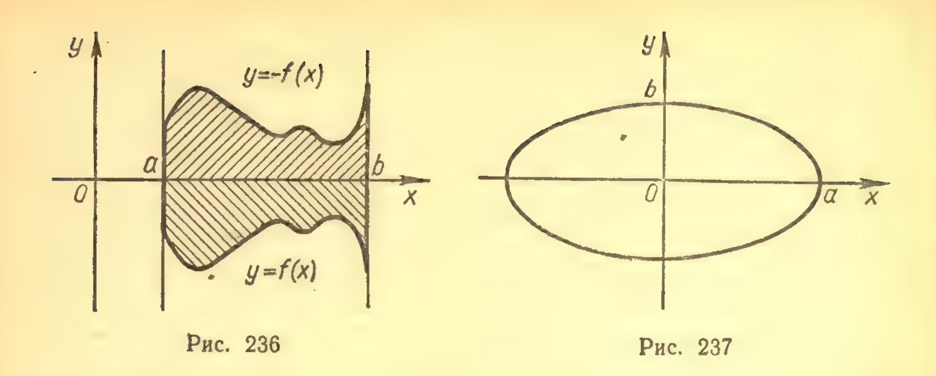


Рис. 236 Рис. 237

ства $f(x) \leqslant |f(x)|$ и результата упр. 516. 520. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную линиями $y = -f(x)$, $y = 0$, $x = a$ и $x = b$ (рис. 236). Эта криволинейная трапеция симметрична исходной трапеции относительно оси абсцисс, поэтому ее площадь равна площади исходной трапеции. С другой стороны, площадь полученной криволинейной трапеции (равная S) есть $\int_a^b (-f(x)\,dx)$, т. е. $-\int_a^b f(x)\,dx$, так как $(-f(x))$ — непрерывная неотрицательная функция. Окончательно получаем $\int_a^b f(x)\,dx = -S$. 522. Выберем начало координат в центре эллипса, а ось абсцисс направим вдоль полуоси длины a (рис. 237). Тогда уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, откуда $|y| = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Следовательно, верхняя половина эллипса ограничена линиями $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $y = 0$, $x = a$ и $x = -a$, поэтому площадь верхней части фигуры $\frac{1}{2}S$ равна: $\int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx$.

$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi a^2$, так как это площадь полукруга радиуса a (рис. 238). Таким образом, площадь фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями a и b, равна $2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2}\pi a^2 = \pi ab$. 523. Центр тяжести однородного конуса находится на его оси на расстоянии $\frac{3}{4}H$ от его вершины, H — высота конуса.

524. Решение. Пусть R — радиус шара. Выберем систему координат так, что начало координат находится в центре шара, а ограничивающая полушар плоскость совпадает с плоскостью Oxy. Рассмотрим осевое сечение полушара (рис. 239). Из теоремы Пифагора следует, что радиус круга, являющегося сечением полушара плоскостью $z = t$, равен $\sqrt{R^2 - t^2}$. Разобьем полу-

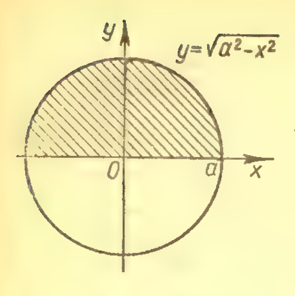


Рис. 238

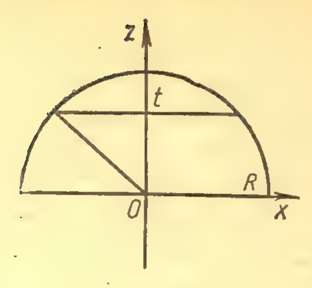


Рис. 239

шар на диски ширины Δt. Центр тяжести диска, ограниченного плоскостями $z = t$ и $z = t + \Delta t$, лежит на оси Oz в точке с координатой, равной t с точностью до величин порядка Δt (так как этот диск имеет Oz осью симметрии). Масса такого диска Δm равна ρV (ρ — плотность полушара, V — объем диска), т. е. $\Delta m \approx \rho\pi (R^2 - t^2) \Delta t$. При нахождении центра тяжести можно считать каждый диск материальной точкой массы, равной массе диска и расположенной в центре тяжести этого диска. По формуле для координаты центра тяжести конечной системы материальных точек получаем, что центр тяжести полушара лежит на оси Oz в точке, координата z которой приблизительно равна

$$z(\Delta t) = \frac{t_0\rho\pi\left(R^2 - t_0^2\right)\Delta t + t_1\rho\pi\left(R^2 - t_1^2\right)\Delta t + \ldots + t_{n-1}\rho\pi\left(R^2 - t_{n-1}^2\right)\Delta t}{\rho\pi\left(R^2 - t_0^2\right)\Delta t + \rho\pi\left(R^2 - t_1^2\right)\Delta t + \ldots + \rho\pi\left(R^2 - t_{n-1}^2\right)\Delta t},$$

где $t_k = k\Delta t$. (Напомним, что центр тяжести системы материальных точек, имеющих массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и расположенных на прямой в точках с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, имеет координату $\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$.) Числитель полученной дроби представляет собой интегральную сумму для функции $\rho\pi t (R^2 - t^2)$, знаменатель — интегральную сумму для функции $\rho\pi (R^2 - t^2)$. Чем меньше Δt, тем точнее полученная дробь выражает координату центра тяжести полушара, иными словами, эта координата есть $\lim\limits_{\Delta t \to 0} z(\Delta t)$. При Δt, стремящемся к нулю, числитель полученной дроби стремится к $\int_0^R \rho\pi t (R^2 - t^2)\, dt$, знаменатель к $\int_0^R \rho\pi (R^2 - t^2)\, dt$. Таким образом, $z =$

$$= \frac{\int_0^R \rho\pi t (R^2 - t^2)\, dt}{\int_0^R \rho\pi (R^2 - t^2)\, dt} = \frac{\rho\pi\left(\frac{R^2}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4\right)\Big|_0^R}{\rho\pi\left(R^2 t - \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^R} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}R^4 - \frac{1}{4}R^4\right)}{\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right)} = \frac{\frac{1}{4}R^4}{\frac{2}{3}R^3} = \frac{3}{8}R.$$

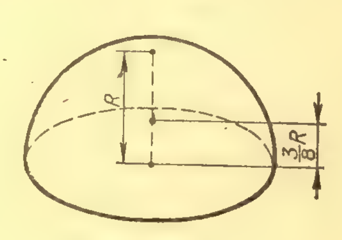


Рис. 240

Итак, центр тяжести однородного полушара лежит на оси его симметрии на расстоянии $\frac{3}{8}R$ от центра шара (рис. 240). **525.** $\frac{1}{4}VH\rho g$, где ρ — плотность воды, g — ускорение свободного падения, H — высота конуса, V — его объем. **526.** $\frac{4}{3}\pi R^4 \rho g$. **527.** Решение. Пусть центр полукруга совпадает с началом координат, а ось симметрии совпадает с осью Ox. Разобьем отрезок $[0; R]$ оси Ox на n конгруэнтных частей длины Δx точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и проведем прямые $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_{n-1}$. Масса части полукруга, ограниченной прямыми $x = x_i$ и $x = x_{i+1}$ ($x_0 = 0$; $x_n = R$), приблизительно равна $2\,\Delta x\sqrt{R^2 - x_i^2}\,\rho$ (ρ — плотность полукруга). Для нахождения (приближенно) координаты центра тяжести заменим каждую такую часть полукруга материальной точкой массы $\rho\, 2\sqrt{R^2 - x_i^2}\,\Delta x$, расположенной на оси Ox в точке с координатой x_i. По формуле координаты центра тяжести конечной системы материальных точек центр лежит на оси Ox в точке с координатой x', где

$$x' = \frac{2x_0\rho\sqrt{R^2 - x_0^2}\,\Delta x + 2x_1\rho\sqrt{R^2 - x_1^2}\,\Delta x + \ldots + 2x_{n-1}\rho\sqrt{R^2 - x_{n-1}^2}\,\Delta x}{2\rho\sqrt{R^2 - x_0^2}\,\Delta x + 2\rho\sqrt{R^2 - x_1^2}\,\Delta x + \ldots + 2\rho\sqrt{R^2 - x_{n-1}^2}\,\Delta x}.$$

Числитель этой дроби есть интегральная сумма для функции $2x\rho\sqrt{R^2 - x^2}$, знаменатель — интегральная сумма для функции $2\rho\sqrt{R^2 - x^2}$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим, что координата X центра тяжести полукруга равна:

$$X = \lim_{\Delta x \to 0} x' = \frac{\int_0^R 2x\rho\sqrt{R^2 - x^2}\,dx}{\int_0^R 2\rho\sqrt{R^2 - x^2}\,dx} = \frac{\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx}{\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx}.$$

Знаменатель полученной дроби равен $0{,}25\,\pi R^2$, так как $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$ равен $\frac{1}{4}$ площади круга радиуса R.

Для вычисления $\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$ сначала отметим, что $\left((R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}(-2)\cdot x\sqrt{R^2 - x^2}$, поэтому в качестве первообразной для функции $x\sqrt{R^2 - x^2}$ можно взять функции $F(x) = -\frac{1}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$. Поэтому $\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = F(R) - F(0) = 0 - \left(-\frac{1}{3}R^3\right) = \frac{1}{3}R^3$. Окончательно получаем: $X = \frac{\frac{1}{3}R^3}{\frac{1}{4}\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$. Таким образом, центр тяжести полукруга

расположен на оси его симметрии на расстоянии $\frac{4R}{3\pi}$ от центра круга (рис. 241).

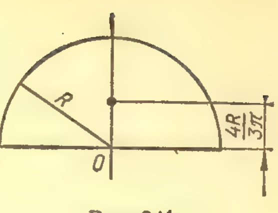


Рис. 241

528. Центр тяжести правильной однородной пирамиды находится на ее высоте на расстоянии $\frac{3}{4}H$ от вершины пирамиды, H — высота пирамиды. 529. Р е ш е н и е. Поместим начало координат в центре окружности, а ось Ox направим вдоль оси симметрии дуги (рис. 242). Разобьем дугу на $2n$ равных частей. Пусть $\Delta t = \frac{\alpha}{n}$. Тогда центр тяжести i-й пары, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, симметричных относительно оси абсцисс дуг лежит на оси абсцисс в точке с координатой p, $p \approx R\cos(i\ \Delta\alpha)$. Масса такой пары дуг равна $R\frac{2\alpha}{2n}\rho$, где ρ — линейная плотность дуги. Заменим эту пару дуг материальной точкой, лежащей на оси абсцисс в точке с координатой $R\cos(i\ \Delta\alpha)$. Центр тяжести полученной системы материальных точек вычисляется по формуле $X(n) = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} =$

$$= \frac{R^2\frac{\alpha}{n}\rho\cos 0 + R^2\frac{\alpha}{n}\rho\cos\frac{\alpha}{n} + \ldots + R^2\frac{\alpha}{n}\rho\cos\frac{(n-1)\alpha}{n}}{R\rho\frac{\alpha}{n} + R\rho\frac{\alpha}{n} + \ldots + R\frac{\rho\alpha}{n}} = \frac{R^2\rho}{R\rho}\times$$

$$\times\frac{\Delta t\cos t_0 + \Delta t\cos t_1 + \ldots + \Delta t\cos t_{n-1}}{n\cdot\Delta t} = R\frac{\Delta t\cdot\cos t_0 + \Delta t\cos t_1 + \ldots + \Delta t\cos t_{n-1}}{\alpha},$$

где $t_i = \frac{i\alpha}{n}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $\Delta t = \frac{\alpha}{n}$. Числитель этой дроби представляет собой интегральную сумму для интеграла $\int\limits_0^\alpha \cos t\,dt$. Найдем абсциссу центра тяжести дуги $X = \lim\limits_{n\to\infty} X(n) = = \frac{R}{\alpha}\int\limits_0^\alpha \cos t\,dt = \frac{R}{\alpha}\sin t\Big|_0^\alpha = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}$. Таким образом, центр тяжести однородной дуги окружности с центральным углом 2α лежит на оси ее симметрии на расстоянии $\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$ от центра окружности.

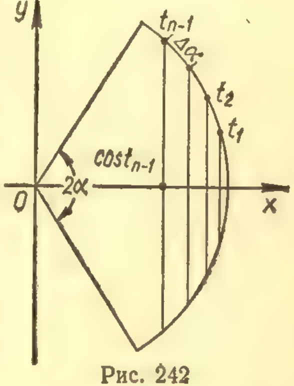


Рис. 242

Глава VIII

533. График изображен на рис. 243. 535. $\{3\}$. 536. $\{-4\}$. 537. $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. 538. $\left\{1\frac{1}{3}\right\}$. 539. $\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

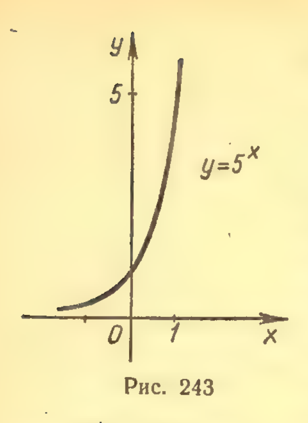


Рис. 243

540. {4}. 541. {—4}. 542. {3}. 543. {—1; 2}.
544. $\left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$. 545. {—2; 3}.
546. {3}. 547. {3}. 548. {1}. 549. {1}. 550. {1; 3}.
551. {2}. 552. {2}. 553. {1}. 554. $\left\{1\frac{4}{13}\right\}$.
555. {1,5}. 556. {8}. 557. {3; 11}. 558.]—1; ∞[.
559. [0; ∞[. 560.]—∞; 2[. 561. [2; ∞[.
562.]—∞; —3]. 563.]—2; ∞[. 564. 7,388.
565. 0,3679. 566. 20,07. 567. 1,648. 568. 2.
570. 3. 572. $-e^{-x}$. 573. $-2e^{3-2x}$.
574. $-2xe^{-x^2}$. 575. $e^{-2x}(\cos x-2\sin x)$.
576. $-5e^{\cos 5x}\sin 5x$. 577. $-5\ln 2\cdot 2^{7-5x}$.

578. $\frac{3^{\operatorname{tg} x}\cdot\ln 3}{\cos^2 x}$. 579. $(0,7)^x\cdot(\ln 0,7\cdot\cos 3x-3\sin 3x)$. 580. $-4x^3\cdot 5^{-x^4}\cdot\ln 5-$ $-\frac{9\ln 0,1}{\sin^2 x}\cdot(0,1)^{\operatorname{ctg} x}$. 581. $\frac{5^x((x^3+2)\ln 5-3x^2)}{(x^3+2)^2}$. 582. $\frac{e^x+1-2xe^x}{2\sqrt{x}(e^x+1)^2}$.

583. $\frac{e^{\frac{x}{3}}\left(2\sin 2x+\frac{1}{3}\cos 2x+\frac{5}{3}\right)}{(\cos 2x+5)^2}$. 584. $\frac{3^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}\ln 3(\sin 5x+7)-5\cos 5x\right)}{(\sin 5x+7)^2}$.

585. $\frac{1}{3}e^{3x}+C$. 586. $-\frac{1}{5}e^{2-5x}+C$. 587. $4e^{\frac{x}{4}}+C$. 588. $-\frac{1}{2e^{2x}}+C$.

589. $\frac{2\cdot 3^{\frac{x}{2}}}{\ln 3}-\frac{5\cdot(0,7)^{4x}}{4\ln 0,7}+C$. 590. $-\frac{5^{1-3x}}{3\ln 5}+\frac{5\cdot(0,6)^{\frac{x}{5}}}{\ln 0,6}+C$. 591. $\frac{4\cdot 2^{\frac{x}{4}}}{\ln 2}+$ $+\frac{1}{3}\cos 3x+C$. 592. $-\left(\frac{1}{3}\right)^{5x}\cdot\frac{1}{5\ln 3}+\frac{4}{7}\sin 7x+C$. 593. $-\frac{e^{-3x}}{3}-1\frac{2}{3}$.

594. $2e^{\frac{x}{2}}+1$. 595. $\frac{1}{\ln 3}(3^x-1)$. 596. $\frac{1}{\ln 2}(5,5-2^{-x})$. 597. $-\frac{1}{3\ln 5}(5^{-3x}+16)$.

598. $\frac{4\cdot 7^{\frac{x}{4}}-195}{\ln 7}$. 599. Первой. 600. Первой. 601. $y=-x+1$. 602. $y=3(x\ln 3+$ $+1-\ln 3)$. 603. $y=\frac{1}{e}(x+2)$. 604. $y=2\frac{2}{49}(x\ln 0,7+1+2\ln 0,7)$.

605. Функция убывает на промежутке]—∞; —1]; возрастает на промежутке [—1; ∞[. В точке —1 функция имеет минимум. 606. График функции изображен на рис. 244. 607. Функция возрастает на промежутках]—∞; —1] и [0; 1]; убывает на промежутках [—1; 0] и [1; ∞[. В точке 0 функция имеет минимум; в точках —1 и 1 функция имеет максимум. 608. График функции изображен на рис. 245. 609. Функция возрастает на промежутке $\left]-\infty;\frac{1}{\ln 2}\right]$,

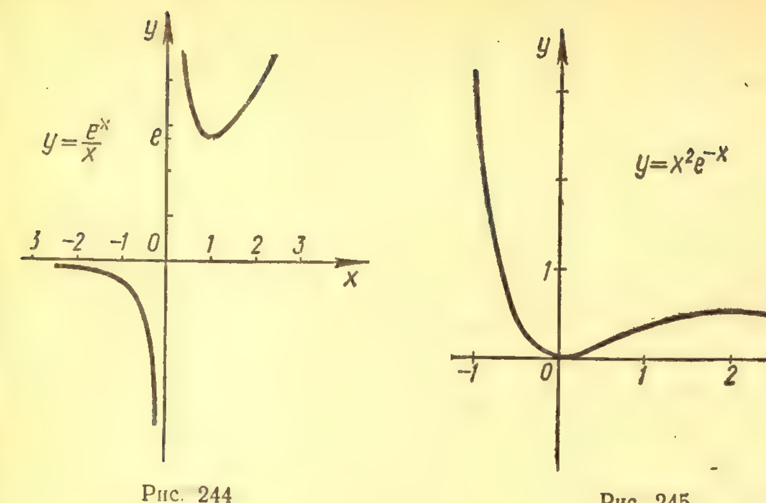


Рис. 244

Рис. 245

убывает на промежутке $\left[\frac{1}{\ln 2};\ \infty\right[$. В точке $\frac{1}{\ln 2}$ функция имеет максимум. **610.** Функция возрастает на промежутке $\left]-\infty;\ \frac{3}{\ln 2}\right]$; убывает на промежутке $\left[\frac{3}{\ln 2};\ \infty\right[$. В точке $\frac{3}{\ln 2}$ функция имеет максимум. Критическая точка 0 не является точкой экстремума. **611.** Функция возрастает на промежутке $]-\infty;\ 1]$; убывает на промежутке $[1;\ \infty[$. В точке 1 функция имеет максимум. **612.** Функция убывает на промежутках $]-\infty;\ 0]$ и $\left[-\frac{4}{\ln 0{,}7};\ \infty\right[$; возрастает на промежутке $\left[0;\ -\frac{4}{\ln 0{,}7}\right]$. В точке 0 функция имеет минимум; в точке $-\frac{4}{\ln 0{,}7}$ функция имеет максимум. **613.** Функция убывает на промежутках $\left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right]$ и $[1;\ \infty[$; возрастает на промежутке $\left[-\frac{1}{2};\ 1\right]$. Функция имеет минимум в точке $-\frac{1}{2}$; максимум в точке 1. **614.** $e^2-1\approx 6{,}389$. **615.** $\frac{e^3-e^{-5}}{2}\approx 10{,}04$. **616.** $\frac{8}{\ln 3}\approx 7{,}28$. **617.** $\frac{16}{\sqrt{5}\ln 5}\approx 4{,}44$. **618.** $8+\frac{8}{9\ln 3}\approx 8{,}81$. **619.** $e-\frac{1}{e^2}\approx 2{,}583$. **620.** $4-\frac{3}{2\ln 2}\approx 1{,}84$. **621.** $\frac{2}{\ln 3}+\frac{0{,}3}{\ln 0{,}7}\approx 0{,}98$. **622.** $e^2-5\approx 2{,}389$. **623.** $e-1-\frac{2}{\pi}\approx 1{,}08$. **627.** $\frac{t\ln 2}{\ln m-\ln n}$. **628.** 9 *мин.* **629.** $t=\frac{1}{\lg 2}\approx 3{,}322$ (*ч*). **630.** 0,6395.

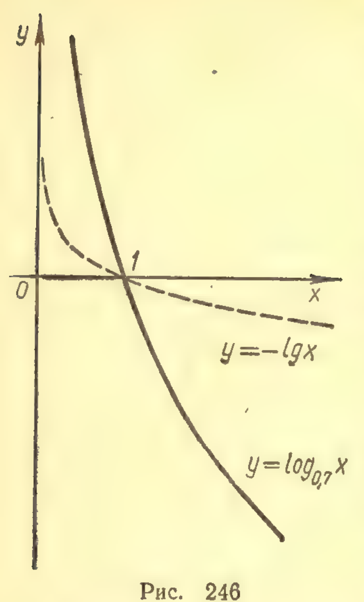


Рис. 246

631. Решение. Пусть $f'(0) = a$. Тогда $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) f(\Delta x) - f(x) f(0)}{\Delta x} = f(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = f(x) f'(0) = af(x)$. Поэтому $f(x) = Ce^{ax}$ (как решение уравнения $y' = ay$), где C — некоторая постоянная. Далее, $f(0) = Ce^{a \cdot 0} = C$; следовательно, $C^2 = C \cdot C = f(0) \cdot f(0) = f(0+0) = f(0) = C$, т. е. $C^2 = C$, откуда $C = 0$ или $C = 1$. Итак, $f(x) = 1 \cdot e^{ax}$, или $f(x) = 0 \cdot e^{ax}$; значит, $f(x) = e^{ax}$, или $f(x) = 0$ для всех x. Проверкой убеждаемся в том, что для функций $y = e^{ax}$ и $y=0$ справедлива теорема сложения. **632.** $\frac{10 \lg 2}{\lg 1{,}6} \approx 14{,}75$ (*мин*). **633.** $\frac{10 \lg 2}{\lg 1{,}25} \approx 31{,}06$ (*мин*). **634.** $500e^{-5} \approx 3{,}37$ (*м/мин*). **635.** 1,4651. **636.** 0,3562. **637.** 1,0986. **638.** 0,9036.

640. График изображен на рис. 246. **643.** $\{\log_3 7\}$; $\log_3 7 \approx 1{,}771$. **644.** $\{1 - \log_2 5\}$; $1 - \log_2 5 \approx -1{,}322$. **645.** $\{x_0\}$; $x_0 \approx 1{,}0694$. **646.** $\{x_0\}$; $x_0 \approx -2{,}077$. **647.** $\{x_0\}$; $x_0 \approx -0{,}2849$. **648.** $\{x_0\}$; $x_0 = \frac{\lg 7 - \lg 3}{\lg 2 - \lg 3} \approx -2{,}090$. **649.** $a \in]1; \infty[$. **650.** $a \in]0; 1[$. **651.** $]0; 9[$. **652.** $\left]0; \frac{1}{16807}\right]$. **653.** $[0{,}6; \infty[$. **654.** $]0; 1[$. **655.** $]1; \infty[$. **656.** $]1; \infty[$. **657.** $]5; \infty[$. **658.** $]-\infty; 0[$. **659.** $]-\infty; 7[$. **660.** $]-3; 3[$. **661.** $]-2; 3[$. **662.** $]-\infty; -2[\cup]5; \infty[$. **663.** $\frac{1}{x \ln 3}$. **664.** $\frac{1}{x \ln 0{,}7}$. **665.** $\frac{1}{x \ln 5}$. **666.** $-\frac{5}{(3-5x) \ln 10}$. **667.** $\frac{2(x^3+5)}{(2x+1) \ln 7} + 3x^2 \log_7 (2x+1)$. **668.** $\frac{3\left(x + 5\sqrt[3]{x^2}\right) - (x-2)\ln(2-x)}{3\sqrt[3]{x^2}(x-2)\left(\sqrt[3]{x}+5\right)^2}$. **669.** $-\operatorname{tg} x$.

670. Функция убывает на промежутке $\left]0; \frac{1}{e}\right]$; возрастает на промежутке $\left[\frac{1}{e}; \infty\right[$. В точке $\frac{1}{e}$ функция имеет минимум. **671.** График функции см. на рис. 247. **672.** Функция убывает на промежутке $]0; 1]$; возрастает на промежутке $[1; \infty[$. В точке 1 функция имеет минимум. **673.** График функции см. на рис. 248. **674.** $\ln 3 \approx 1{,}0986$. **675.** $\frac{1}{2} \ln 5 \approx 0{,}8047$. **676.** $2 \ln 3 \approx 2{,}1972$. **677.** $\ln 2 \approx 0{,}6931$. **678.** $\ln 3 \approx 1{,}0986$. **679.** $17{,}5 - 6 \ln 6 \approx 6{,}7492$. **680.** $12 - 5 \ln 5 \approx 3{,}9530$. **681.** $]1; \infty[$. **682.** $]2{,}8; 3[$. **683.** $]-0{,}5; -0{,}255[$. **684.** $]0{,}382; 0{,}4[$. **685.** $\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **686.** $\left\{\frac{1}{8}\right\}$. **687.** $\{0{,}09\}$.

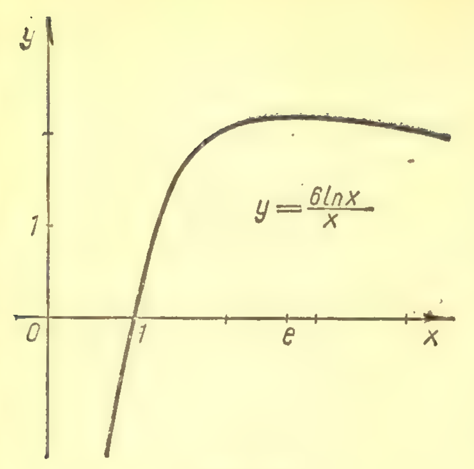


Рис. 247

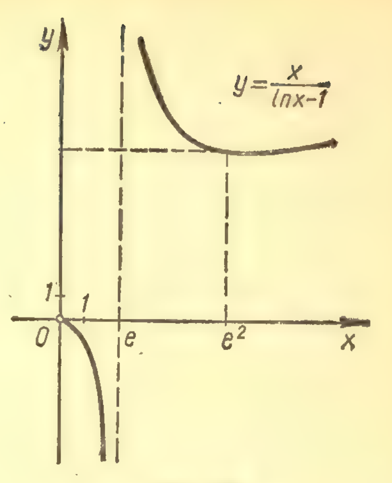


Рис. 248

688. {3}. 689. $\left\{\frac{1}{7}\right\}$. 690. $\left\{\frac{8}{7}\right\}$. 691. {5}. 692. $\{\sqrt{0,6}\}$. 693. {4}. 694. {3}. 695. {0,5}. 696. {1,5; 3}. 697. {13}. 698. {6}. 699. $\left\{\frac{1}{81};\ 3\right\}$. 700. {0,01; 0,001}. 701. $\left\{\frac{1}{4};\ 4\right\}$. 702. $\left\{\frac{1}{3};\ 27\right\}$. 703. {2}. 704. $\left\{\frac{1}{7};\ 7\right\}$. 705. {7}. 706. $\{\sqrt{10};\ 100\}$. 707. $y = x - 1$. 708. $y = \frac{1}{e}x$. 709. $y = \lg e\,(x-1)$ и $y = 0{,}1\lg ex + 1 - \lg e$. 711. $f'(x) = \sqrt{3}\,x^{\sqrt{3}-1}$. 712. $g'(x) = \frac{1}{\pi}x^{\frac{1}{\pi}-1}$. График функции изображен на рис. 249. 713. $u'(x) = -ex^{-e-1}$. График функции изображен на рис. 250. 714. {—2; 2}. 715. {—1; 5}. 716. {8}. 717. {11}. 718. {3}. 719. {0; 0,4}. 720. {10}. 721. {5}. 722. {3}. 723. ∅. 724. График изображен на рис. 251. 726. График изображен на рис. 252. 729. График изображен на рис. 253. 732. График изображен на рис. 254. 733. График изображен на рис. 255. 736. График изображен на рис. 256. 739. График изображен на рис. 257. 740. $3e^{3x}$. 741. $-6e^{-2x}$. 742. $-35e^{-5x}$. 743. $-6e^{-6x}$. 744. $3^x \times \ln 3$. 745. $-4\ln 5\cdot 5^{-4x}$. 746. $-6\ln 7\cdot 7^{-2x}$. 747. $-150\ln 1{,}7\cdot 1{,}7^{-6x}$. 748. $-10\ln 3\cdot 9^{2-5x}$. 749. $-2\ln 0{,}3\cdot 0{,}3^{7-2x}$. 750. $\cos x\cdot e^{\sin x}$. 751. $-\sin x\cdot e^{\cos x}$. 752. $\frac{5\cdot\ln 3\cdot 3^{5\,\mathrm{tg}\,x}}{\cos^2 x}$. 753. $-\frac{2\ln 7\cdot 7^{2\,\mathrm{ctg}\,x}}{\sin^2 x}$. 754. $5^x(\ln 5\times\sin 2x + 2\cos 2x)$. 755. $\frac{2^x(\ln 2\cdot\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$. 756. $\frac{\mathrm{tg}\,x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{\cos^2 x}$.

757. $-\frac{4x+\sin 2x}{4x\sqrt{x}\sin^2 x}$. 758. $\frac{2^{\frac{x}{3}}((x^4+3)\ln 2 - 12x^3)}{3(x^4+3)^2}$.

759. $\frac{(0{,}3)^x((0{,}5\sin 2x + 5\cos^2 x)\ln 0{,}3 - 1)}{\cos^2 x(\mathrm{tg}\,x+5)^2}$. 760. $\frac{1}{x\ln 2}$. 761. $-\frac{1}{x\ln 3}$.

762. $\frac{1}{(2x-3)\ln 3}$. 763. $-\frac{5}{(7+5x)\ln 5}$. 764. $\frac{\lg e}{x}$. 765. $\frac{4\lg e}{3+4x}$. 766. $\mathrm{ctg}\,x$.

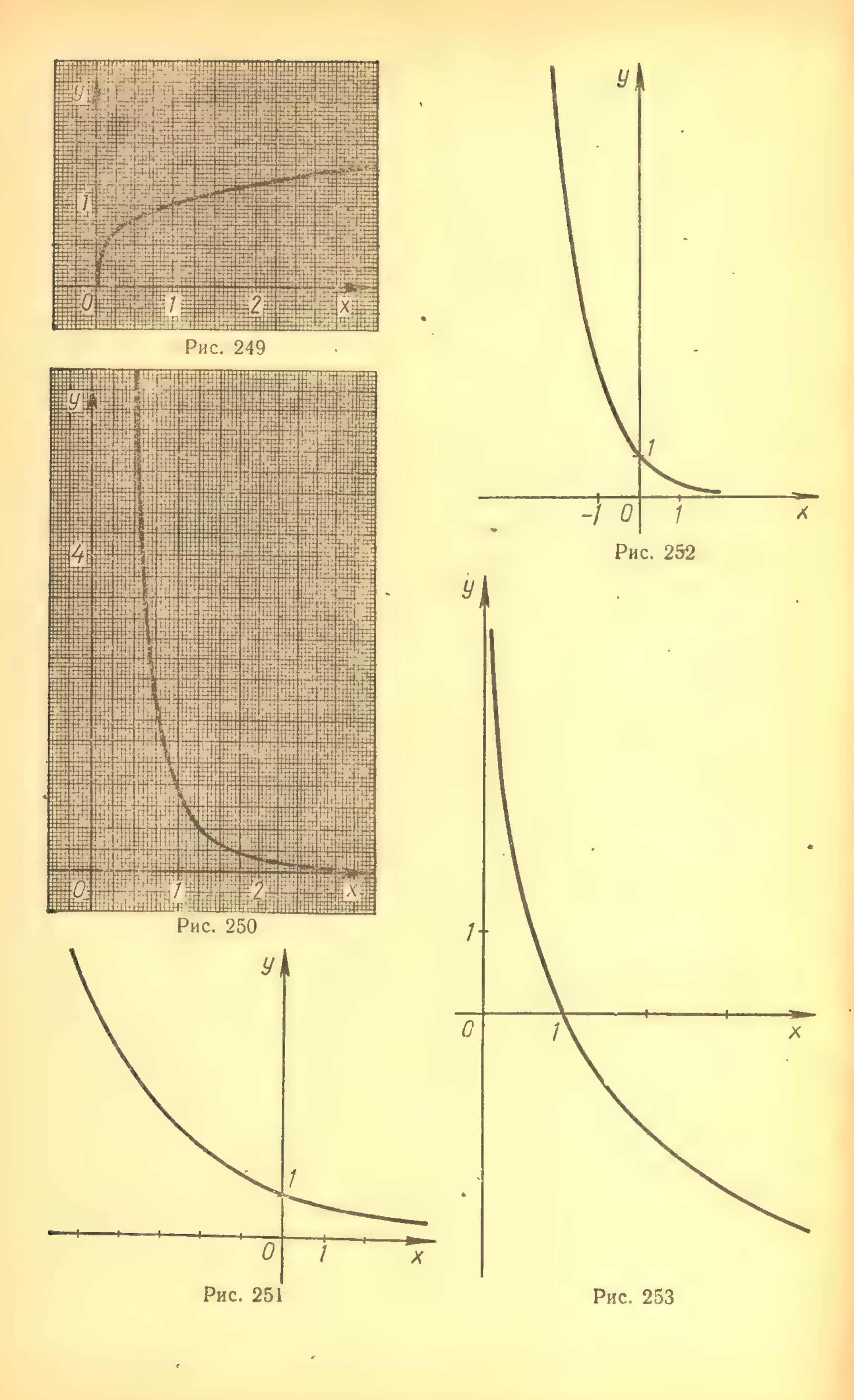


Рис. 249

Рис. 250

Рис. 251

Рис. 252

Рис. 253

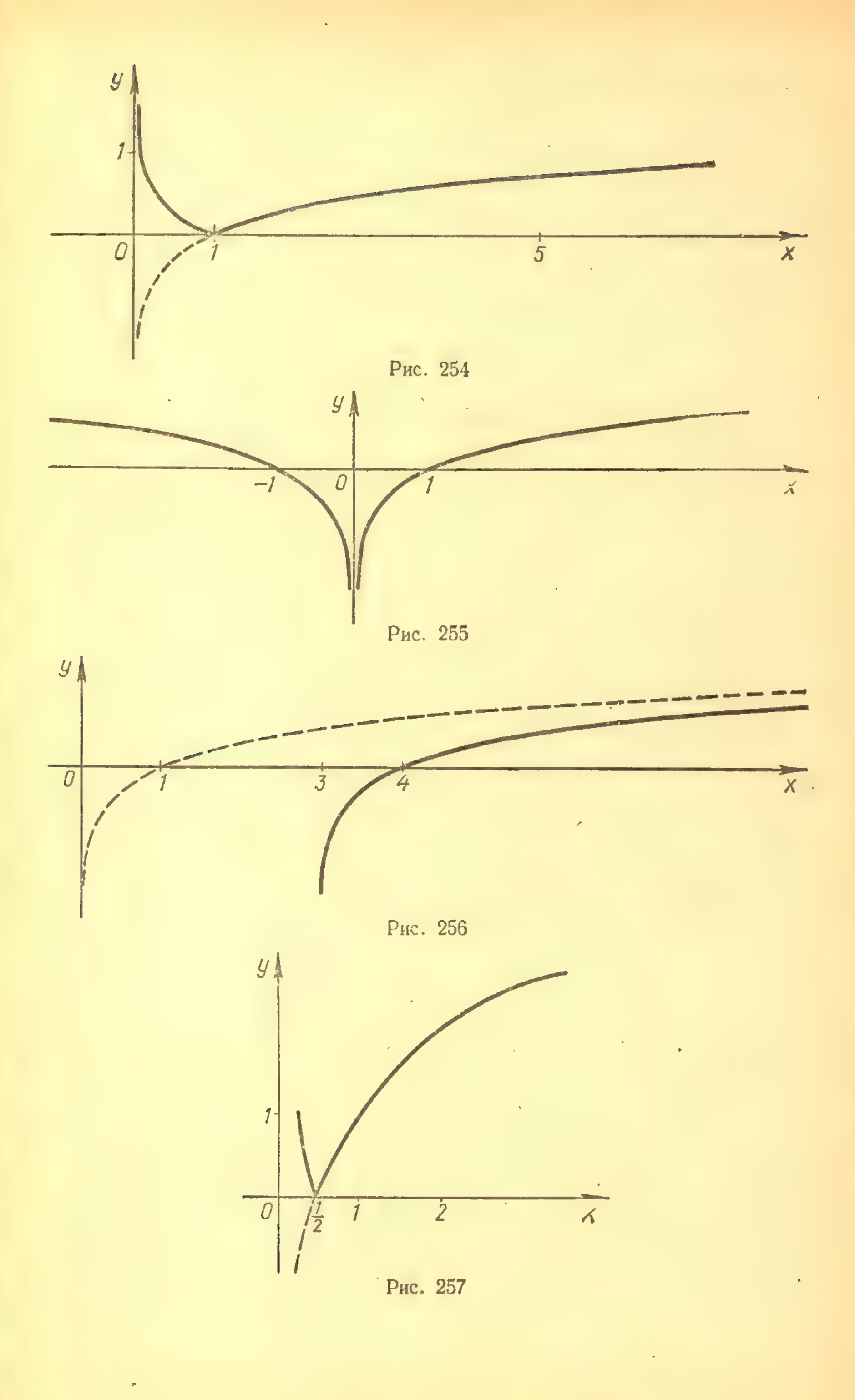


Рис. 254

Рис. 255

Рис. 256

Рис. 257

767. $\frac{2}{\sin 2x}$. 768. $3^x\left(\ln 3 \cdot \ln (5x) + \frac{1}{x}\right)$. 769. $\frac{x \cos x \cdot \ln (7x) - \sin x}{x \ln^2 (7x)}$. 770. $\frac{2\sqrt{x} + 6 - \sqrt{x} \ln (2x)}{2x(\sqrt{x} + 3)^2}$. 771. $3x^2 \ln x + x^2$. 772. $\frac{3x^2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}(x^3 + 4\sqrt{x} + 5) \ln 11}$. 773. $\frac{\lg e\,(3 \cos 3x + 2^x \ln 2)}{\sin 3x + 2^x}$. 774.]1; ∞[. 775.]—2; ∞[. 776.]—∞; 4[. 777.]—∞; 1,5[. 778.]—1,5; ∞[. 779.]1,5; ∞[. 780.]—∞; —1 [∪]3; ∞[. 781.]—2; 3[. 782.]—∞; ∞[. 783.]—∞; —3 [∪] —3; ∞[.

784. $\frac{1}{2} e^{2x} + C$. 785. $-7e^{-x} + C$. 786. $15e^{\frac{x}{3}} + C$. 787. $\frac{2}{3}\sqrt{e^{3x}} + C$. 788. $-\frac{5^{-x}}{\ln 5} + C$. 789. $-2,5 \cdot \frac{3^{-2x}}{\ln 3} + C$. 790. $\frac{2,4\sqrt[3]{7^{5x}}}{\ln 7} + C$. 791. $-\frac{20}{\ln 8}\sqrt{\frac{1}{8^x}} + C$.

792. $\ln (x + 7) + C_1$ при $x > -7$ и $\ln (-x - 7) + C_2$ при $x < -7$. 793. $0,6 \ln (5x + 1) + C_1$ при $x > -0,2$ и $0,6 \ln (-5x - 1) + C_2$ при $x < -0,2$. 794. $-2,5 \ln (3 - 2x) + C_1$ при $x < 1,5$ и $-2,5 \ln (2x - 3) + C_2$ при $x > 1,5$. 795. $-0,8 \ln (7 - 5x) + C_1$ при $x < 1,4$ и $-0,8 \ln (5x - 7) + C_2$ при $x > 1,4$. 796. $\frac{1}{8} \ln x + C_1$ при $x > 0$ и $\frac{1}{8} \ln (-x) + C_2$ при $x < 0$.

797. $0,7x^{\frac{10}{7}} + C$. 798. $10\sqrt[5]{x} + C$. 799. $\frac{x^{\pi+1}}{\pi + 1} + C$. 800. $\ln 2 \approx 0,6931$. 801. $e^3 - 1 \approx 19,08$. 802. $\frac{80}{3 \ln 3} \approx 24,27$. 803. $\frac{\ln 7}{3} \approx 0,6486$. 804. $e^3 - 1 \approx 19,08$. 805. $\frac{24}{\ln 5} - \frac{8}{9 \ln 3} \approx 14,10$. 806. $\frac{63}{\ln 4} - 7,5 \approx 37,95$. 807. $\ln 5 \approx 1,6094$. 808. $3 - 3 \ln 2 \approx 0,9207$. 809. $6 - 2 \ln 3 \approx 3,8028$. 810. $4 - 3 \ln 3 \approx 0,7042$. 811. $y = 2x + 1$. 812. $y = \frac{1}{3}x + 1$. 813. $y = 10 (\ln 10 \cdot x + 1 - \ln 10)$. 814. $y = -\frac{1}{3}(\ln 3 \cdot x - 1 - \ln 3)$. 815. $y = 2x - 1$. 816. $y = x \cdot 3 \lg e - \lg e$. 817. 2,807. 818. 2,183. 819. —4,676. 820. —1,566. 821. 1,112. 822. 3,246. 823. 1,464. 824. 23,14. 825. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$. 826. $\log_2 3 > \log_3 2$. 827. $\log_7 3 < \log_5 9$. 828. $\log_{11} 7 < \log_{13} 19$.

829. Функция убывает на промежутке]0; 1]; возрастает на промежутке [1; ∞[. В точке 1 функция имеет минимум. 830. Функция возрастает на промежутках $\left]0; \frac{1}{e^2}\right]$ и [1; ∞[; убывает на промежутке $\left[\frac{1}{e^2}; 1\right]$. В точке $\frac{1}{e^2}$ функция имеет максимум, в точке 1 — минимум. 831. Функция возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$; убывает на промежутках $\left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$. В точках $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$, функция имеет максимумы; в точках $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$, функция имеет минимумы. 832. Функ-

ция убывает на промежутках $\left]0; \frac{1}{e}\right]$ и $[e; \infty[$; возрастает на промежутке $\left[\frac{1}{e}; e\right]$. В точке e функция имеет максимум; в точке $\frac{1}{e}$ — минимум. 833 Функция возрастает на промежутках $\left[-\frac{3\pi}{4} + \pi k; -\frac{\pi}{2} + \pi k\right[$ и $\left]-\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k\right]$, $k \in Z$; убывает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right]$, $k \in Z$. Функция имеет максимумы в точках $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; минимумы — в точках $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. В точках $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, функция разрывна. 834. Функция убывает на промежутках $]0; 1]$ и $[e^2; \infty[$; возрастает на промежутке $[1; e^2]$. В точке 1 функция имеет минимум; в точке e^2 — максимум.

Глава IX

835. $\left\{\left(2; \frac{1}{3}\right)\right\}$. 836. $\{(1; -1)\}$. 837. $\{(-1; -3)\}$. 838. $\{(3y + 4; y) \mid y \in R\}$. 839. $\{(2{,}5 - 3y; y) \mid y \in R\}$. 840. $\{(1{,}5y + 2; y) \mid y \in R\}$. 841. $\varnothing$. 842. $\varnothing$. 843. $\varnothing$. 844. 3. 845. $-\frac{2}{3}$. 846. 16. 847. $-3\frac{1}{3}$. 848. Таких значений нет. 849. $a \in R$, $a \neq 4$. 850. $a \neq -0{,}2$. 851. $a = 2{,}5$. 852. $a \in R$. 853. $\{(-3; 2; -1)\}$. 854. $\{(2; 3; 1)\}$. 855. $\left\{\left(\frac{7c + 17}{5}; \frac{11c + 11}{5}; c\right) \middle| c \in R\right\}$. 856. $\{(-7c - 20; 4c + 10; c) \mid c \in R\}$. 857. $\varnothing$. 858. $\varnothing$. 859. $\{(1; -1; 0; 2)\}$. 860. $\{(0{,}4; 0{,}5); (0{,}6; 0{,}3)\}$. 861. $\{(2; 1); (-1; -2)\}$. 862. $\{(4; -3); (4; 3)\}$. 863. $\{(2; 3); (3; 2)\}$. 864. $\{(4; 1); (1; 4)\}$. 865. $\{(0{,}5; 4)\}$. 866. $\{(1; 2)\}$. 867. $\{(2; 1); (1; 2)\}$. 868. $\{(4{,}5; 0{,}5)\}$. 869. $\{(2; 18); (18; 2)\}$. 870. $\{(1; 2); (16; -28)\}$. 871. $\left\{(27; 4); \left(\frac{1}{81}; -3\right)\right\}$. 872. $\{(16; 20)\}$. 873. $\left\{\left(\frac{3\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k\right) \middle| k \in Z\right\}$. 874. $\left\{\left((-1)^{l+1} \frac{\pi}{6} + \pi l; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right); \left((-1)^l \frac{\pi}{6} + \pi l; \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) \middle| k, l \in Z\right\}$. 875. $\left\{\left(\frac{\pi}{4} - (-1)^l \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(2k - l)\right); \left(\frac{\pi}{4} + (-1)^l \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(2k + l)\right) \middle| k, l \in Z\right\}$. 876. $\left\{\left(k - \frac{1}{6}; k + \frac{1}{6}\right) \middle| k \in Z\right\}$. 877. $\left\{\left(x_0 + \pi k; \frac{\pi}{4} - x_0 - \pi k\right); \left(x_1 + \pi k; \frac{\pi}{4} - x_1 - \pi k\right) \middle| k \in Z\right\}$, где $x_0 \approx 0{,}46$; $x_1 \approx 0{,}32$. 878. $\left\{\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)\right\}$. 879. $\{(2; -1); (-1; 2)\}$. 880. $\{(1; 2); (2; 1)\}$. 881. $\{(1; \sqrt{2}); (1; -\sqrt{2}); (2; 1); (2; -1)\}$. 882. $\{(1; 9); (9; 1)\}$. 883. $\{(1; 27); (27; 1)\}$. 884. $\{(1; 64); (64; 1)\}$. 885. $\{(3; 2)\}$. 886. $\{(7; 3); (-7; -3)\}$. 887. $\left\{\left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\right.\right.$

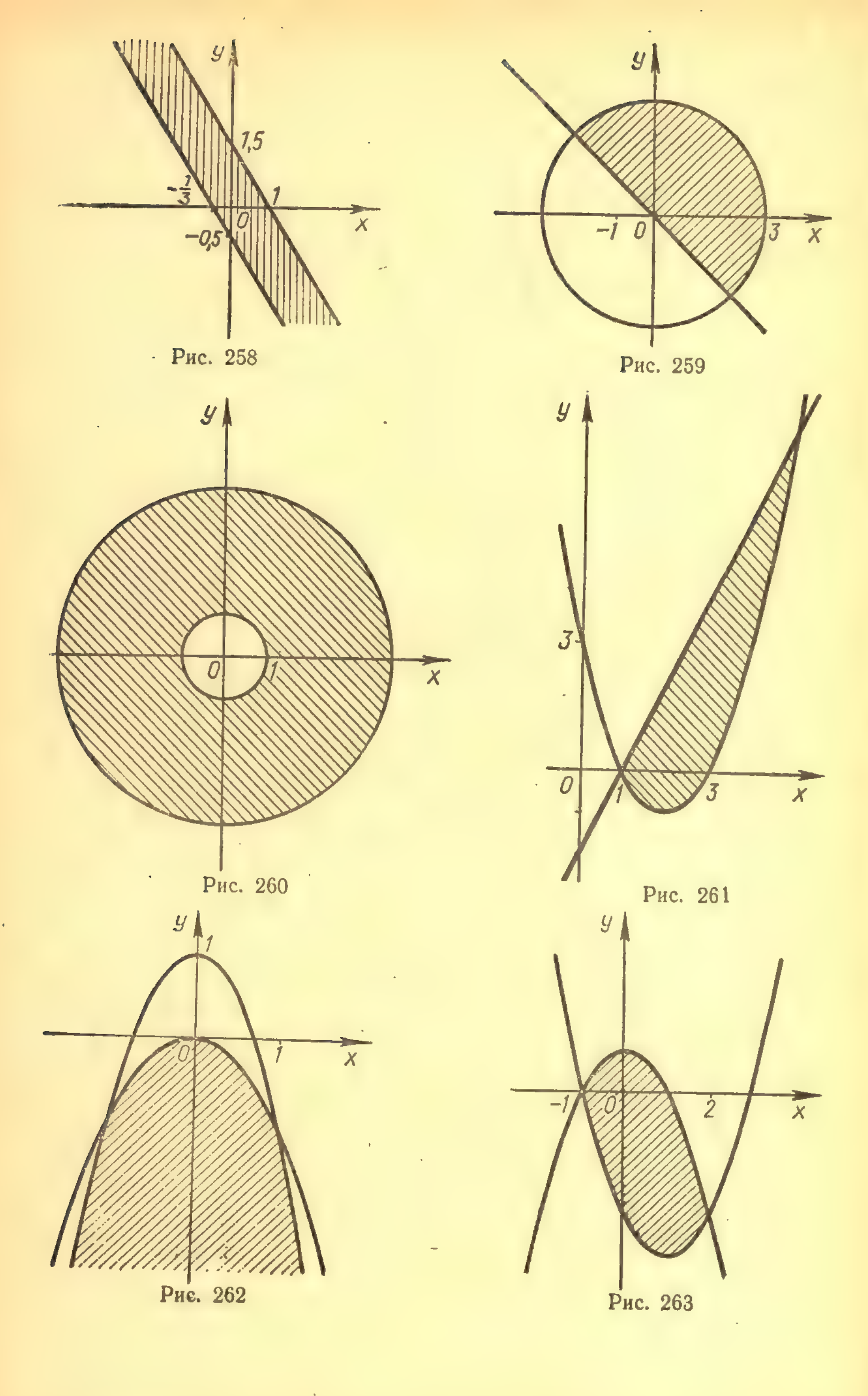


Рис. 258

Рис. 259

Рис. 260

Рис. 261

Рис. 262

Рис. 263

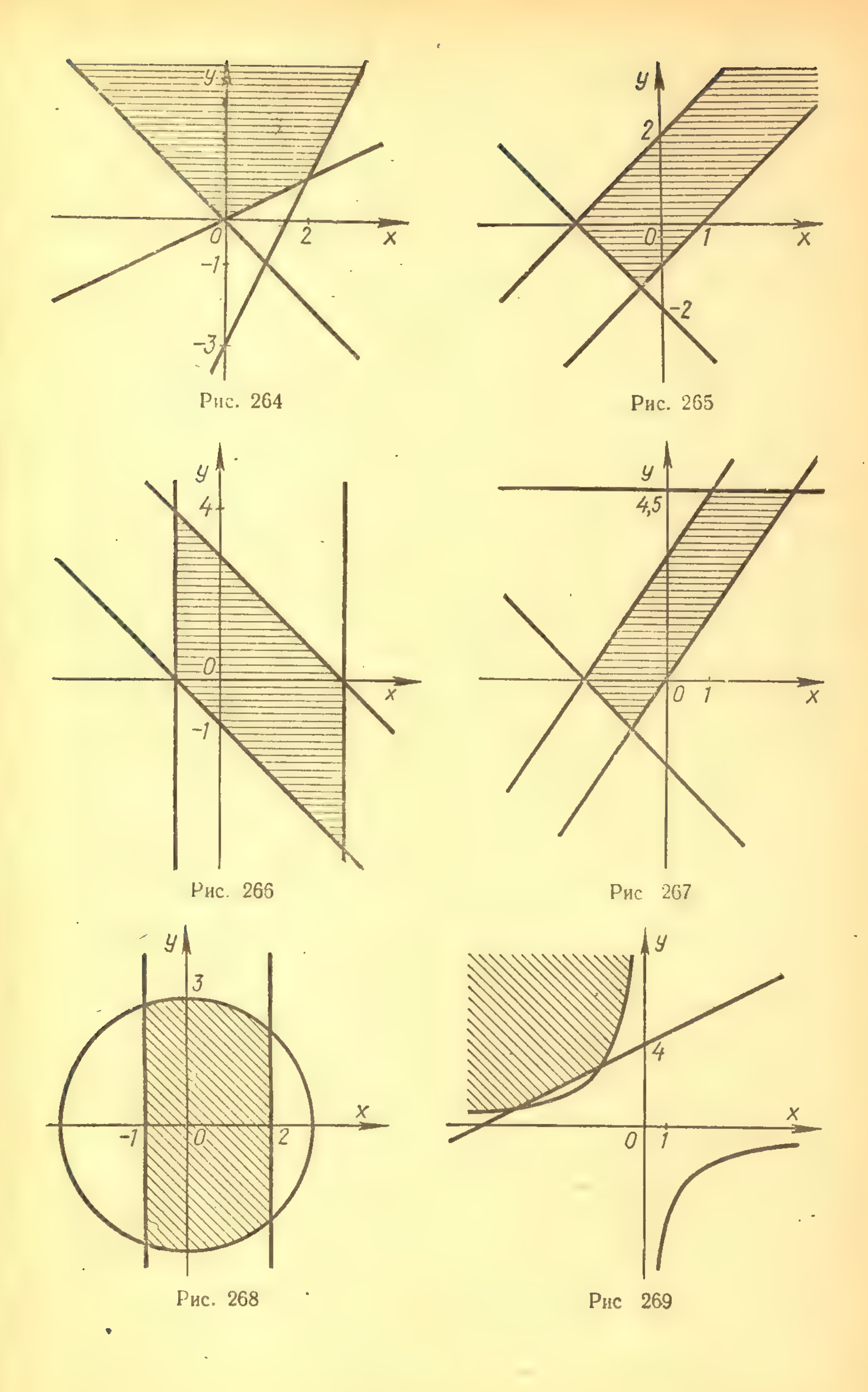


Рис. 264

Рис. 265

Рис. 266

Рис 267

Рис. 268

Рис 269

$\left.\frac{\pi}{3}+2\pi l\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi l\right) \Big| \ k, l \in Z \Big\}$. **888.** Угол. **889.** Полоса (рис. 258). **890.** Полуплоскость, определяемая вторым неравенством. **891.** Полукруг (рис. 259). **892.** Пересечение внешней области круга и полуплоскости. **893.** Кольцо, ограниченное концентрическими окружностями (рис. 260). **894.** Параболический сегмент. **895.** Параболический сегмент (рис. 261). **896.** Множество изображено на рис. 262. **897.** Множество изображено на рис. 263. **898.** Треугольник с вершинами M (0; 0), M (—2; 1) и M (2; 2). **899.** Треугольник с вершинами M (—1; 0), M (0,5; 0) и M (2; 3). **900.** Треугольник с вершинами M (—1; 0), $M\left(\frac{1}{3};\ 0\right)$ и M (—1; 2). **901.** Множество изображено на рис. 264. **903.** Множество изображено на рис. 265. **904.** В рационе должно быть по две единицы веса каждого вида кормов. **905.** Следует выпустить 3,5 единицы первого вида продукции и 3 единицы второго вида продукции. **906.** {(1; 3); (2; 6)}. **907.** {(2; 3); (—2; —3)}. **908.** {(41; 40)}. **909.** $\left\{\left(3\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right);\ (4;\ 1)\right\}$. **910.** {(1; 2); (2; 1)}. **911.** {(4; 1)}. **912.** {(5; 1); (5; —1)}. **913.** $\left\{\left(-\frac{3}{8};\ -\frac{1}{8}\right);\ \left(-\frac{5}{24};\ -\frac{7}{24}\right);\ \left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{6}\right);\ \left(\frac{1}{12};\ \frac{1}{3}\right)\right\}$. **914.** Параллелограмм (рис. 266). **915.** Параллелограмм с вершинами M (—3; —1), M (1; 3), M (4; 3) и M (0; —1). **916.** Трапеция с вершинами M (0; —1), M (—6; 5), M (2; 1) и M (2; —2). **917.** Трапеция (рис. 267). **918.** Выпуклый четырехугольник с вершинами M (—1; 0), M (—1; 1), M (3; 5) и $M\left(\frac{4}{3};\ 0\right)$. **919.** Выпуклый четырехугольник. **920.** Сектор. **921.** Множество изображено на рис. 268. **923.** Множество изображено на рис. 269.

Задачи на повторение всего курса

924. 3; 8; 3. **926.** 7; 4. **928.** 3,75. **929.** 1,01; 8,072; 81,108. **931.** 2,53. **933.** 1. **934.** б) $15^{\log_3 10} = 10^{\log_3 15}$. **935.** a при $|a| > 1$. **941.** Указание. Воспользуйтесь равенством $\sin(k+1)x = \sin kx \cos x + \sin x \cos kx$. **943.** $-330x$. **944.** $70\sqrt{2a^3b^2\sqrt{a}}$. **945.** $2 \cdot (6!)^2 = 1036800$. **946.** 1800. **948.** I или III; II. **949.** —1. **951.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **952.** $\frac{\sqrt{17}-1}{4}$. **953.** ± 2. **954.** $-2\sqrt{2}$. **955.** 0,720. **956.** $\frac{a}{|b|}$. **957.** 25%. **958.** 75 *км/ч*. **959.** 4 *км/ч*. **960.** 55 *км/ч*. **961.** 6 и 12 дней. **962.** 140 *м*. **963.** 8. **964.** 160 *г*; 20%. **965.** 5 *ч*; 7 *ч*. **966.** 4 *м/сек*; 3 *м/сек*. **967.** 12, да. **968.** 240 $м^3$. **969.** 35. **970.** 12 *г*, 48 *г*, 1,5 $г/см^3$. **974.** а) —0,5; б) 0. **975.** а) $1\frac{5}{22}$; б) $2\frac{41}{99}$; в) $\frac{3}{7}$; г) $\frac{17}{54}$. **976.** а) $-2\frac{1}{4}$; б) $\frac{\sin x}{2-\sin x}$; в) $\frac{2\sqrt{ab}}{a-2\sqrt{ab}+b}$; г) $\frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$. **977.** а) $]-\infty;\ 7-\sqrt{34}[\ \cup\ ]7+\sqrt{34};\ \infty[$; б) $]-\infty;\ \infty[$; в) $\left[-\frac{1}{3};\ 2\right]$; г) $\left]\frac{9-\sqrt{105}}{4};\right.$

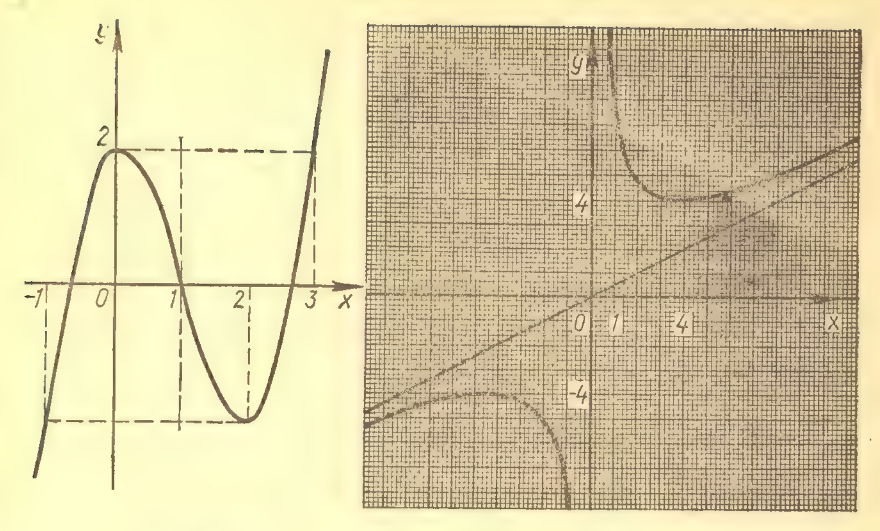


Рис. 270　　Рис. 271

$\frac{9+\sqrt{105}}{4}\Big[$. **978.** R. **979.** $]-\infty; -0{,}4[\cup]2; \infty[$. **980.** $]-\infty; \infty[$. **981.** $\left[-\frac{2}{3}; 3\right]$.
982. $x^2-2x-2=0$. **983.** -20. **984.** а) $M(-1; 17)$; б) $M(2; -3)$. **985.** $\vec{r}(3; 0)$. **986.** $y=-0{,}5x^2+2$. **987.** $y=0{,}5(x+2)^2+3$. **988.** $y=\sin x$. **990.** График функции изображен на рис. 270. **991.** График функции изображен на рис. 271. **992.** б) График функции изображен на рис. 272. **994.** График совпадает с графиком функции $y=2$ при $x\neq\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; при $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$, функция не определена. **996.** Графики изображены на рис. 273, 274. **997.** Графики функций из упражнений а) и б) совпадают (рис. 275). **998.** а) 1; б) 0,5.

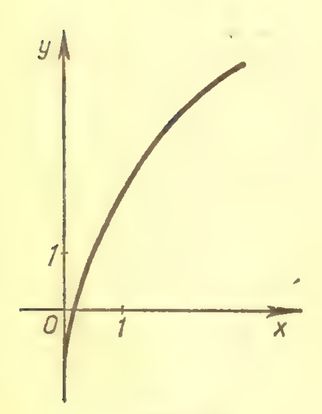


Рис. 272

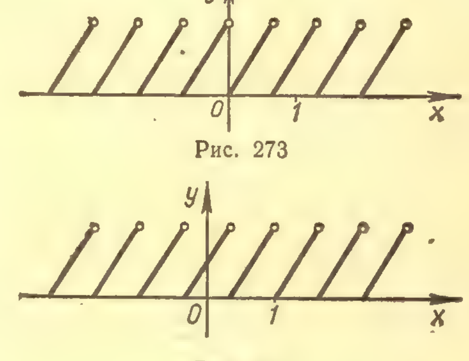


Рис. 273

Рис. 274

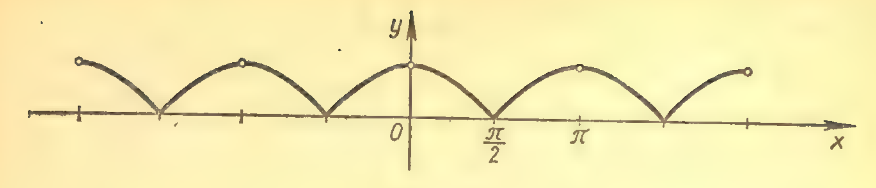


Рис. 275

999. $\frac{8\pi}{3}$. 1000. а) Ни четная, ни нечетная; б) нечетная; в) ни четная, ни нечетная; г) ни четная, ни нечетная; д) четная; е) ни четная, ни нечетная; ж) нечетная; з) нечетная. 1001 а) $\sqrt{2}$; б) $-\sqrt{2}$. 1003. а) $12x^5-19x^4+1$; б) $-\frac{5}{(x+1)^2}$; в) $(x+1)\cos x+\sin x-\cos^2 x+\sin 2x\cdot x$; г) $\frac{2\operatorname{tg} x\lg e}{x}+\frac{2\lg x}{\cos^2 x}$.
1004. $\frac{60x(3-x^2)}{(8x^2-3)^3}$. 1005. 60 *м/мин*; 36 *м/мин*^{2}. 1007. $y=-2x-4$; $y=2x$; $y=5x-2{,}25$. 1008. $y=1{,}5x+1{,}5$; возрастает на всей числовой прямой. 1009. $y=1+\frac{1}{x}$; убывает на промежутках $]-\infty;0[$ и $]0;\infty[$.
1010. $y=\frac{3x-1}{x+2}$. 1011. $y=\log_2(x-1)$. 1012. $y=3^x-2$. 1013. $y=\frac{10^x-1}{10^x+1}$. 1014. Функция возрастает на промежутках $]-\infty;\frac{1}{3}[$ и $]\frac{1}{3};\infty[$.
1015. Функция постоянная $\left(\text{при } x\neq\frac{1}{2}\right)$, т. е. является невозрастающей и неубывающей на промежутках $]-\infty;0{,}5[$ и $]0{,}5;\infty[$. Экстремумов функция не имеет, хотя каждая точка области определения критическая. 1016. Функция убывает на промежутке $]-\infty;2]$; возрастает на промежутке $[2;\infty[$. В точке 2 функция имеет минимум. 1017. Функция убывает на промежутке $]-\infty;-1]$; возрастает на промежутке $[-1;\infty[$. В точке -1 функция имеет минимум. 1018. Функция возрастает на промежутке $]0;e]$; убывает на промежутке $[e;\infty[$. В точке e функция имеет максимум. 1019. Функция убывает на промежутке $]0;1]$; возрастает на промежутке $[1;\infty[$. В точке 1 функция имеет минимум. 1020. Функция убывает на промежутке $\left]0;\frac{1}{e}\right]$; возрастает на промежутке $\left[\frac{1}{e};\infty\right[$. В точке $\frac{1}{e}$ функция имеет минимум. 1021. Функция убывает на промежутках $]-\infty;-1[$ и $]-1;0]$; возрастает на промежутке $[0;\infty[$. В точке 0 функция имеет минимум; в точке -1 — разрыв. 1022. Функция возрастает на промежутках $[x_0-\pi+2\pi k;\ x_0+2\pi k]$, $k\in Z$; убывает на промежутках $[x_0+2\pi k;\ x_0+\pi+2\pi k]$, $k\in Z$; в точках вида $x_0+2\pi k$, $k\in Z$, функция имеет максимумы; в точках вида $\pi+x_0+2\pi k$, $k\in Z$, функция имеет минимумы, где $x_0=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\approx 0{,}59$.

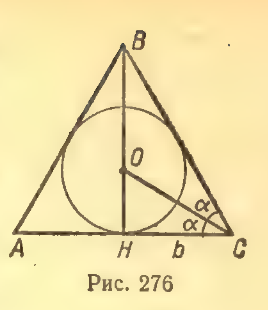


Рис. 276

1023. Функция возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ 2\pi k\right]$, $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right]$, $k\in Z$; убывает на промежутках $\left[2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$, $\left[-\pi+2\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$. В точках πk, $k\in Z$, функция имеет максимумы, в точках $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$, функция имеет минимумы. **1026.** $g(3)=135$. **1027.** $-4\frac{7}{8}$ $\left(\text{при } x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **1028.** 1. **1029.** 3 *см*, 6 *см*, 4 *см*. **1030.** На расстоянии $1{,}5R$ от точки касания. **1031.** $\frac{\pi}{3}$. Решение. Пусть основание треугольника равно $2b$, а угол при основании 2α. Тогда (рис. 276) $r=|OH|=|HC|\operatorname{tg}\alpha=b\operatorname{tg}\alpha$. Выразим b через заданную площадь S треугольника: $S=0{,}5\times|AC|\cdot|BH|=b\cdot b\cdot\operatorname{tg}2\alpha$, откуда $b^2=\frac{S}{\operatorname{tg}2\alpha}$. Будем искать максимум квадрата радиуса.

$$r^2=b^2\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{S\operatorname{tg}^2\alpha}{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{S(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}=\frac{S}{2}(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha).$$

Обозначим $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha$ через $u(\alpha)$. Нужно найти наибольшее значение функции $u(\alpha)$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$; $u'(\alpha)=\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{3\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$; $u'(\alpha)=0$ при $\operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, т. е. при $\alpha=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. Из точек такого вида только одна $x=\frac{\pi}{6}$ лежит на данном отрезке. Далее, $u(0)=u\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, $u\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Таким образом, максимальное значение $u(\alpha)$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$ достигается при $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Угол при вершине равен $\pi-4\alpha=\frac{\pi}{3}$.

1032. $\sqrt[3]{4V}$. **1033.** $\frac{20}{\sqrt{3}}$ *см*. **1034.** $\frac{2}{\sqrt{3}}R$. Решение. Рассмотрим осевое сечение цилиндра, вписанного в шар радиуса R (рис. 277). По теореме Пифагора из треугольника AOB находим $|AB|^2=|AO|^2-|BO|^2$, т. е. $r^2=R^2-\frac{h^2}{4}$, где r — радиус основания цилиндра, h — его высота; $V=\pi r^2h=\pi\left(R^2h-\frac{h^3}{4}\right)$.

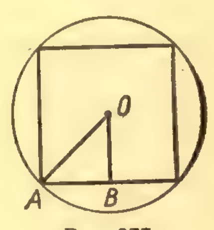


Рис. 277

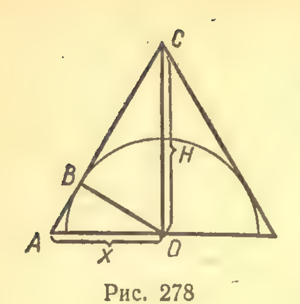


Рис. 278

Требуется определить наибольшее значение функции $V(h) = \pi\left(R^2h - \frac{h^3}{4}\right)$ на отрезке $[0;\ 2R]$. $V'(h) = \pi R^2 - \frac{3h^2\pi}{4}$, $V' = 0$ при $3h^2 = 4R^2$, т. е. при $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Так как $V(0) = V(2R) = 0$, а $V\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) >$ > 0, то функция $V(h)$ достигает наибольшего значения при $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. **1035.** Решений нет при $R \geqslant$ $\geqslant 0{,}5H$ и $r = 0{,}5HR:(H-R)$ при $R < 0{,}5H$. **1036.** $R = 1{,}5r$. **1037.** $4R$. **1038.** $H = R\sqrt{3}$. Решение. Пусть около полушара радиуса R описан прямой круговой конус. Рассмотрим осевое сечение конуса (рис. 278). Из подобия треугольников AOC и OBC получаем: $\frac{x}{\sqrt{H^2+x^2}} = \frac{R}{H}$, откуда $x^2 = \frac{H^2R^2}{H^2-R^2}$; $V(H) = \frac{1}{3}\pi x^2H = \frac{1}{3}\pi R^2\frac{H^3}{H^2-R^2}$; $V'(H) =$

$$= \frac{\frac{1}{3}\pi R^2((H^2-R^2)3H^2 - H^3\cdot 2H)}{(H^2-R^2)^2} = \frac{\pi R^2(H^4-3H^2R^2)}{3(H^2-R^2)^2};$$

$V' = 0$ при $H = R\sqrt{3}$. Остается проверить, что при этом значении H функция $V(H)$ достигает наименьшего значения на промежутке $]0;\ \infty[$. **1039.** $b = \frac{40}{\sqrt{3}}$ *см*; $h = 40\sqrt{\frac{2}{3}}$ *см*. **1040.** $R = \frac{P}{\pi+4}$; $H = \frac{P}{\pi+4}$. **1041.** $\frac{23}{410}$ *ч*. **1042.** 2,4 *м*. Решение. Пусть наблюдатель находится на расстоянии x от стены в точке O (рис. 279). Требуется узнать, при каком x $\widehat{EOB}$ будет наибольшей. $\widehat{EOB} = \widehat{EOA} - \widehat{BOA}$, поэтому

$$\operatorname{tg}(\widehat{EOB}) = \operatorname{tg}(\widehat{EOA} - \widehat{BOA}) = \frac{\frac{3{,}2}{x} - \frac{1{,}8}{x}}{1 + \frac{3{,}2}{x}\cdot\frac{1{,}8}{x}} = \frac{1{,}4x}{x^2+5{,}76}.$$

Обозначим $\frac{1{,}4x}{x^2+5{,}76}$ через $f(x)$. Так как $0 \leqslant \widehat{EOB} < \frac{\pi}{2}$ и на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ тангенс возрастает, то достаточно найти x, при котором $f(x)$ принимает наибольшее значение на промежутке $[0;\ \infty[$.

$$f'(x) = \frac{(x^2+5{,}76)\cdot 1{,}4 - 1{,}4x\cdot 2x}{(x^2+5{,}76)^2} = \frac{-1{,}4(x^2-5{,}76)}{(x^2+5{,}76)^2};\quad f'(x) = 0$$

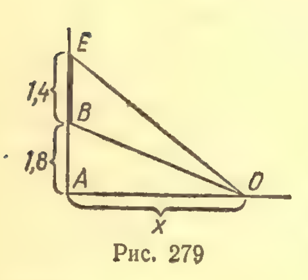


Рис. 279

при $x = 2{,}4$. На промежутке $]2{,}4;\ \infty[$ $f' < 0$, поэтому при $x \in]2{,}4;\ \infty[$ $f(x) < f(2{,}4)$. Аналогично $f(x) < f(2{,}4)$ для $x \in [0;\ 2{,}4[$. Итак, при $x =$ $= 2{,}4$ функция f достигает наибольшего значения на промежутке $[0;\ \infty[$. **1043.** $4\sqrt{2}$ *м*. **1044.** $1\frac{27}{43}$ *ч*. **1045.** Длина страницы — 30 *см*, ширина — 20 *см*.

Решение. Пусть длина страницы равна x. Тогда текст представляет собой прямоугольник со сторонами $x-6$ и $\frac{384}{x-6}$. Ширина страницы равна $\frac{384}{x-6}+4$, площадь равна $\frac{384x}{x-6}+4x$. Требуется определить наименьшее значение функции $f(x)=\frac{384x}{x-6}+4x$ на промежутке $]6; \infty[$; $f'(x)=$ $=384\cdot\frac{x-6-x}{(x-6)^2}+4=\frac{-384\cdot 6}{(x-6)^2}+4$; $f'(x)=0$ при $4(x-6)^2=384\cdot 6$, т. е. при $(x-6)^2=576$, откуда $x=30$; при этом ширина страницы равна $\frac{384}{30-6}+4=16+4=20$. **1046.** б) $\frac{7-2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{12}$. **1047.** а) $5\frac{1}{3}$; б) $20\frac{5}{6}$; в) 18; г) $1\frac{1}{3}$; д) $12-5\ln 5\approx 3{,}953$. **1048.** а) $]1; 2[\,\cup\,]3; \infty[$; б) $]-\infty; 2[\,\cup\,]3; 5[$; в) $]-\infty; -3]\cup[1; \infty[$; г) $]-4; -1[\,\cup\,]-1; 6[$; д) $]1; 2[\,\cup\,]3; 4[$; е) $[-\sqrt{2}; -1]\cup[1; \sqrt{2}]$. **1049.** 20 *км/ч*. Решение. Вторая часть расходов равна kx^3, где через x обозначена скорость парохода, k — коэффициент пропорциональности. Для определения k подставим $x=10$, тогда $30=1000k$, откуда $k=0{,}03$. 1 *км* пути пароход пройдет за $\frac{1}{x}$ *ч*. За это время расходы будут равны $480\cdot\frac{1}{x}+0{,}03x^3\cdot\frac{1}{x}$. Требуется определить наибольшее значение функции $f(x)=\frac{480}{x}+0{,}03x^2$ на промежутке $]0; \infty[$; $f'(x)=-\frac{480}{x^2}+0{,}06x$; $f'(x)=0$ при $x^3=\frac{480}{0{,}06}$, т. е. при $x=20$. Легко проверить, что в этой точке функция достигает наименьшего значения. **1050.** $\frac{x^2}{2}+\ln x+C_1$ при $x>0$, $\frac{x^2}{2}+\ln(-x)+C_2$ при $x<0$. **1051.** $\frac{2}{3}\sqrt{2}\,x^{\frac{3}{2}}+C$. **1052.** $-2\cos x+\frac{1}{3}\sin 3x+C$. **1053.** $-\frac{1}{4}x^{-4}-$ $-x^{-1}+C$. **1054.** $\frac{(x-1)^3}{3}+C$ при $x\neq 1$. **1055.** $3\ln(x+4)+C$ при $x>-4$, $3\ln(-x-4)+C$ при $x<-4$. **1056.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg} 2x+C$. **1057.** $\frac{3}{2}\operatorname{tg} 2x+C$. **1058.** x^2+x^3+C. **1059.** $\frac{1}{4+\sqrt{2}}x^{4+\sqrt{2}}+C$. **1060.** x^2-3x+4. **1061.** $-0{,}25\cos 2t+3$. **1062.** $y=x^3-5$. **1065.** а) $4\sin 15^\circ\cos 10^\circ\cos 5^\circ$; б) $4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\pi+2\beta}{4}\sin\frac{\pi-2\alpha}{4}$; в) $4\sin\frac{x}{2}\cos 3x\cos\frac{5x}{2}$; г) $2\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$. **1074.** $x+1$ при $x>0$. **1075.** -4, $t\neq 0$, $t>-4$. **1076.** $-a^{0,5}-2a^{-1,5}$ при $a\neq 1$. **1077.** $\frac{1-a}{\sqrt{a}}$ при $a\neq 1$.

1085. $\{15\}$. 1086 $\left\{\frac{2}{3}\right\}$. 1087. а) $\left\{\frac{\pi k}{5}\middle| k \in Z\right\}$; б) $\left\{2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k \middle| k \in Z\right\}$; в) $\left\{\frac{2\pi k}{5};\ \pi+2\pi k \middle| k \in Z\right\}$; г) $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k \middle| k \in Z\right\}$. 1088. а) $\left\{\frac{\pi+\alpha}{3}+\frac{2\pi k}{3} \middle| k \in Z\right\}$, $\alpha = \arccos\frac{4}{5} \approx 0{,}64$; б) $\left\{\frac{\pi-\alpha}{2}+\pi k \middle| k \in Z\right\}$, $\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{5}{12} \approx 0{,}395$. 1089. а) $\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}+\pi k;\ \frac{7\pi}{24}+\pi k;\ -\frac{\pi}{24}+\pi k \middle| k \in Z\right\}$, $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{6}\right) \approx 1{,}74$; б) $\left\{\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi k}{3};\ -\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi k}{3};\ \frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3};\ -\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3} \middle| k \in Z\right\}$, $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{14}\right) \approx 1{,}64$; в) $\{3\}$; г) $\left\{2\frac{2}{3};\ 4\right\}$; д) $\{-1;\ 1;\ -2;\ 2\}$; е) $\{-1;\ 1\}$. 1090. $\left]-\infty;\ \frac{1}{6}\right] \cup [1{,}5;\ \infty[$. **1091.** $]2;\ 3[$. **1092.** $]-\infty;\ -3[\cup]-1;\ 1[\cup]3;\ \infty[$. **1093.** $]-\infty;\ -1{,}5]\cup[-1;\ 1]\cup[1{,}5;\ \infty[$. **1094.** $]-3{,}5;\ -3[$. **1095.** $\left]0;\ \frac{1}{2}\right[$. **1096.** $]-\infty;\ -2[\cup]4;\ \infty[$. **1097.** $]-\infty;\ 3{,}4[\cup]4;\ \infty[$. **1098.** $]-3{,}5;\ 0[$. **1099.** $\left]1;\ 4\frac{8}{9}\right[$. **1100.** $\left[-3;\ \frac{4}{3}\right[$. **1101.** $\varnothing$. **1102.** $\{(1;\ 0;\ 2;\ -1)\}$. **1103.** $\{(1;\ -2;\ -1;\ 2)\}$.

ОБОЗНАЧЕНИЯ, ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ В УЧЕБНОМ ПОСОБИИ

N — множество всех натуральных чисел

Z — множество всех целых чисел

Z_0 — множество всех неотрицательных целых чисел

Q — множество всех рациональных чисел

R — множество всех действительных чисел, числовая прямая

R_+ — множество всех положительных действительных чисел

R^2 — числовая плоскость

$[a; b]$ — замкнутый промежуток (отрезок) с началом a и концом b, $a < b$

$]a; b[$ — открытый промежуток (интервал) с началом a и концом b, $a < b$

$]a; b]$, $[a; b[$ — полуоткрытые промежутки с началом a и концом b, $a < b$

$b - a$ — длина промежутка с концами a и b

$]a; \infty[$, $[a; \infty[$, $]-\infty; b]$, $]-\infty; b[$ — бесконечные промежутки, лучи числовой прямой

$]-\infty; \infty[$ — бесконечный промежуток, числовая прямая

$\Rightarrow$ — знак следования

$\Leftrightarrow$ — знак равносильности

$\in$ — знак принадлежности

$n \in N$ — число n принадлежит множеству натуральных чисел N

$\subset$ — знак включения

$C \subset D$ — множество C включено в множество D, или C есть подмножество множества D, или множество D содержит множество C

$\bigcup$ — знак объединения

$C \bigcup D$ — объединение множеств C и D

$\vec{a}$ — обозначение вектора

$\vec{r}\,(x_0; y_0)$ — вектор, отображающий точку $(0; 0)$ в точку $(x_0; y_0)$. Числа x_0, y_0 называются координатами этого вектора $\vec{a}$

$]a-\varepsilon; a+\varepsilon[$ — ε-окрестность точки a

$\{a; b; \ldots\}$ — множество, состоящее из элементов $a, b, \ldots$

$(a; b)$ — упорядоченная пара

$(a; b; c)$ — упорядоченная тройка. Если a, b, c попарно различные, то $(a; b)$, $(a; b; c)$ обозначают также упорядоченные множества

$n!$ — n-факториал — произведение первых n натуральных чисел

P_n — число перестановок из n элементов

A_n^m — число размещений из n по m

C_n^m — число сочетаний из n по m

$[AB]$ — отрезок прямой с концами A и B

(AB) — прямая, проходящая через точки A и B

$|AB|$ — длина отрезка $[AB]$

$\overrightarrow{AB}$ — вектор, отображающий точку A в точку B

$[x]$ — целая часть числа x

$\{x\}$ — дробная часть числа x

$|x|$ — модуль (абсолютная величина) числа x

(x_n), (a_n), (f_n) — бесконечная последовательность

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ — число a является пределом последовательности (x_n)

$f(x)$ — значение функции f в точке x

$D(f)$ — область определения функции f

$E(f)$ — множество значений функции f

Δx — приращение переменной x

$\Delta f(x_0)$, Δf — приращение функции f в точке x_0

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ — число b является пределом функции f при x, стремящемся к a

$f'(x_0)$ — производная функции f в точке x_0

$\angle AOB$ — угол AOB

R_O^α — поворот плоскости (луча, вектора) на угол α вокруг точки O. Если O — начало координат, то просто: R^α

sin — функция синус

cos — функция косинус

tg — функция тангенс

ctg — функция котангенс

$\exp_a$ — показательная функция с основанием a

e — число e, основание показательной функции, для которой $(e^x)' = e^x$

exp — показательная функция с основанием e

$\log_a$ — логарифм с основанием a

lg — десятичный логарифм

ln — натуральный логарифм (логарифм с основанием e)

$\max\limits_{[a;\, b]} f$ — наибольшее значение функции f на отрезке $[a; b]$

$\min\limits_{[a;\, b]} f$ — наименьшее значение функции f на отрезке $[a; b]$

$\int$ — знак интеграла

$\int_a^b f(x)\, dx$ — интеграл функции f в пределах от a до b

arcsin — функция арксинус

arccos — функция арккосинус

arctg — функция арктангенс

arcctg — функция арккотангенс

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ИБ № 1599

Андрей Николаевич Колмогоров,
Олег Сергеевич Ивашев-Мусатов,
Борис Михайлович Ивлев,
Семен Исаакович Шварцбурд

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Учебное пособие
для 10 класса

Спец. редактор
Г. В. Дорофеев

Редактор
Г. С. Уманский

Художник переплета
Б. Л. Николаев

Художественный редактор
Е. Н. Карасик

Технический редактор
М. И. Смирнова

Корректор
Н. И. Новикова

Сдано в набор 28/II 1977 г. Подписано к печати 1/VIII 1977 г. 60×90 1/16. Бумага тип. № 3. Печ. л. 17. Уч.-изд. л. 14,37. Тираж 2400 тыс. экз.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59. Заказ № 273.

Цена 25 коп.

25 к.

